NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for naturvitenskap og teknologi

NTNU

Løsningsforslag til eksamen i TFY4170 Fysikk 2

9. desember 2008

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 1. Kvantemekanikk

Vi ser på en partikkel som kan bevege seg langs én dimensjon, x-aksen. Den tidsavhengige Schrödinger ligningen er

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x,t)\right]\psi(x,t) = \hat{E}\psi(x,t)\,, \tag{1}$$

der $\psi(x,t)$ er den tidsavhengige bølgefunksjonen, $V(x,t)$ er potensialet,

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

er impuls-operatoren,

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{3}$$

er energi-operatoren, $\hbar = h/(2\pi)$ og h er Plancks konstant. Vi antar i resten av oppgaven at potensialet er stasjonært $V(x,t) = V(x)$.

a) Bølgefunksjonen kan skrives som

$$\psi(x,t) = \Psi(x)\exp\left(-iEt/\hbar\right). \tag{4}$$

Vis at den tidsuavhengige bølgefunksjonen $\Psi(x)$ er løsning av den tids-uavhengige Schrödinger ligningen

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right]\Psi(x) = E\Psi(x)\,. \tag{5}$$

LØSNING

Potensialet er stasjonært $V(x,t) = V(x)$. Vi setter inn ansatzen $\psi(x,t) = \Psi(x)\exp\left(-iEt/\hbar\right)$ i den tidsavhengige Schrödinger ligningen (1) og ser at impulsoperatoren $\hat{p}$ bare virker på den romlige delen av bølgefunksjonen $\Psi(x)$ og energi-operatoren $\hat{E}$ virker bare inn på den tidsavhengige delen av bølgefunksjonen $\exp\left(-iEt/\hbar\right)$. Venstre side av den tidsavhengige Schrödinger ligningen (1) kan dermed skrives som

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right]\psi(x,t) = \exp\left(-iEt/\hbar\right)\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right]\Psi(x)\,. \tag{6}$$

Tilsvarende kan den høyre siden av den tidsavhengige Schrödinger ligningen (1) skrives som

$$\hat{E}\psi(x,t) = \Psi(x) E \exp\left(-iEt/\hbar\right). \tag{7}$$

Venstre og høyre side av (1) skal være like og ved å dele både (6) og (7) på den tidsavhengige delen av bølgefunksjonen $\exp\left(-iEt/\hbar\right)$ får vi den tidsuavhengige Schrödinger ligningen (5) som vi skulle vise.

b) Vi ser først på partikkelen i et område $|x| < a/2$, der det stasjonære potensialet $V(x) = 0$. Det er to mulige uavhengige løsninger av den tidsuavhengige Scrödinger ligningen (5). Vis at disse to mulige uavhengige løsningene kan skrives som

$$\Psi(x) = A\exp\left(ikx\right) + B\exp\left(-ikx\right), \tag{8}$$

der A og B er normaliseringskonstanter og k er et bølgetall. Finn sammenhengen mellom bølgetallet k og energien E.

LØSNING

Vi setter bølgefunksjonen (8) inn i den tidsuavhengige Schrödinger ligningen (5).

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right]\Psi(x) &= E\Psi(x) && (9)\\
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right]\left[A\exp\left(ikx\right) + B\exp\left(-ikx\right)\right] &= E\left[A\exp\left(ikx\right) + B\exp\left(-ikx\right)\right] && (10)\\
\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left[A\exp\left(ikx\right) + B\exp\left(-ikx\right)\right] &= E\left[A\exp\left(ikx\right) + B\exp\left(-ikx\right)\right]. && (11)
\end{aligned}$$

Dette skal være gyldig for alle posisjoner x. Dermed må energien være gitt ved

$$E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}. \tag{12}$$

Samtidig har vi vist at bølgefunksjonen $\Psi(x) = A\exp\left(ikx\right) + B\exp\left(-ikx\right)$ er en løsning av den tidsavhengige Schrödinger ligningen (5).

c) Uskarpheten til en fysisk størrelse O med dens assosierte kvantemekaniske operator $\hat{O}$ er definert ved

$$\delta O = \sqrt{\langle \hat{O}^2\rangle - (\langle \hat{O}\rangle)^2}, \tag{13}$$

der

$$\langle \hat{O}^n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x,t)\hat{O}^n\psi(x,t) \tag{14}$$

og n er et vilkårlig tall, f.eks. $n = 1$ eller $n = 2$. Hva er uskarpheten til energien til partikkelen, δE, når den er i en tilstand beskrevet av $\psi(x,t) = \Psi(x)\exp\left(-iEt/\hbar\right)$ som ovenfor ?

Løsning

Vi beregner først forventningsverdien av de forskjellige momentene til energi-operatoren:

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{E}^n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x,t) \hat{E}^n \psi(x,t) \,, &(15)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \exp(iEt/\hbar)(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^n \psi(t) \exp(-iEt/\hbar) \,, &(16)\\
&= \left[\exp(iEt/\hbar)(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^n \exp(-iEt/\hbar)\right] \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x)\Psi(x) \,, &(17)\\
&= [\exp(iEt/\hbar) E^n \exp(-iEt/\hbar)]\, 1 \,, &(18)\\
&= E^n \,. &(19)
\end{aligned}
$$

Vi brukte normaliserings-betingelsen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x)\Psi(x) = 1$. Dermed finner vi uskarpheten til energien til partikkelen

$$
\begin{aligned}
\delta E &= \sqrt{\langle \hat{E}^2 \rangle - (\langle \hat{E} \rangle)^2} \,, &(20)\\
&= \sqrt{E^2 - E^2} \,, &(21)\\
&= 0 \,. &(22)
\end{aligned}
$$

Det er ingen uskarphet i energien til partikkel i en stasjonær tilstand, som forventet.

d) Vi antar fortsatt at partikkelen kan bevege seg fritt for alle $|x| < a/2$, men det møter en hard vegg i punktene $|x| = a/2$, dvs. stasjonære potensialet er

$$
V(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } |x| < a/2 \\ \infty & \text{når } |x| \geq a/2 \end{cases} \,. \qquad (23)
$$

Bestem koeffisientene A og B og finn de kvantiserte energi-nivåene til systemet.

Løsning

Bølgefunksjonen er null i det området der potensialet er uendelig stort. Bølgefunksjonen må også være kontinuerlig gjennom punktene $x = -a/2$ og $x = a/2$. Det gir betingelsene

$$
\Psi(x = -a/2) = 0 \qquad (24)
$$

og

$$
\Psi(x = a/2) = 0 \,. \qquad (25)
$$

Innsatt for bølgefunksjonen (8) gir dette følgende betingelser på koeffisientene A og B, samt bølgevektoren k og dermed energien E:

$$
\begin{aligned}
A \exp(-ika/2) + B \exp(ika/2) &= 0 \,, &(26)\\
A \exp(ika/2) + B \exp(-ika/2) &= 0 \,. &(27)
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
B &= -A \exp(-ika) \,, &(28)\\
\exp(ika) - \exp(-ika) &= 0 \,. &(29)
\end{aligned}
$$

Den siste betingelsen gir en kvantiseringsbetingsle for bølgevektoren k og dermed energien $E = \hbar^2 k^2/(2m)$:

$$\begin{aligned} \exp(ika) - \exp(-ika) &= 0\,, && (30)\\ 2i\sin(ka) &= 0 && (31) \end{aligned}$$

som gir

$$k_l = \frac{l\pi}{a}\,, \tag{32}$$

der l er et heltall og energien

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2\,. \tag{33}$$

Bølgefunksjonen kan skrives som

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= A\left[\exp(ikx) - \exp(-ikx)\exp(-ika)\right]\,, && (34)\\ &= A\exp(-ika/2)\left[\exp(ik(x+a/2)) - \exp(-ik(x+a/2))\right]\,, && (35)\\ &= A\exp(-ika/2)2i\sin(k(x+a/2))\,, && (36)\\ &= A'\sin(x+a/2)\,, && (37) \end{aligned}$$

der vi har innført en ny konstant $A' = A\exp -(ika/2)2i$.

Vi bestemmer konstanten A' ved normalisering:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-a/2}^{a/2} dx\Psi^*(x)\Psi(x)\,, && (38)\\ &= |A'|^2\int_{-a/2}^{a/2} dx\sin^2(k(x+a/2))\,, && (39)\\ &= |A'|^2\int_0^a dx\sin^2(kx)\,, && (40)\\ &= |A'|^2\frac{a}{l\pi}\int_0^{l\pi} du\sin^2 u\,, && (41)\\ &= |A'|^2\frac{a}{l\pi}\frac{l\pi}{2}\,, && (42)\\ &= |A'|^2\frac{a}{2}\,. && (43) \end{aligned}$$

Fortegnet og fasen til amplituden er ubestemt. Vi velger

$$|A'| = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{44}$$

slik at bølgefunksjonen kan skrives som

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi(x+a/2)}{a}\,. \tag{45}$$

Det går også an å skrive bølgefunksjonen på andre måter. Vi bruker $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ og finner

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{l\pi(x + a/2)}{a}, \tag{46}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\sin \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{l\pi}{2} + \cos \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{l\pi}{2} \right], \tag{47}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}(-1)^{l/2} \sin \frac{l\pi x}{a} & l \text{ er like} \\ \sqrt{\frac{2}{a}}(-1)^{l+1} \cos \frac{l\pi x}{a} & l \text{ er odde} \end{cases} \tag{48}$$

Fortegnene i bølgefunksjonene ovenfor er valgfrie.

Oppgave 2. Bølgefysikk

En bølge som brer seg langs x-aksen er beskrevet ved amplituden

$$w(x,t) = \sin(\omega(k)t - kx), \tag{49}$$

der

$$\omega(k) = ck^4 \tag{50}$$

er vinkelfrekvensen, c er en konstant, t er tiden og k er bølgetallet. Uttrykk gruppehastigheten til bølgen ved dens fasehastighet (dvs. bølgefart).

Løsning

Fasehastigheten er gitt ved

$$v = \frac{\omega(k)}{k}, \tag{51}$$

$$= ck^3. \tag{52}$$

Tilsvarende er gruppehastigheten er gitt ved

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \tag{53}$$

$$= c4k^3, \tag{54}$$

$$= 4v. \tag{55}$$

Gruppehastigheten er altså fire ganger større enn fasehastigheten.

Oppgave 3. Materialfysikk

Vi ser på et to-partikkel-system. Den stasjonære Schrödinger-ligningen for to-partikkel-systemet er

$$\left[\hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r}_1) + \hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r}_2)\right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{56}$$

der E er total-energien og $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ er bølgefunksjonen til to-partikkel-systemet. Vi antar at vi har et system der de to laveste én-partikkel-tilstandene er henholdsvis $\psi_1(\mathbf{r})$ med egen-energi E_1 og $\psi_2(\mathbf{r})$ med egen-energi E_2, dvs.

$$\hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r}) = E_1\psi_1(\mathbf{r}) \tag{57}$$

og

$$\hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r} = E_2\psi_2(\mathbf{r})\,. \tag{58}$$

Hva er den laveste egen-energien E og den tilhørende bølgefunksjonen $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ for et to-partikkel-system med koordinater $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ dersom a) de to partiklene er bosoner og b) de to partiklene er fermioner? Vi ser bort fra partiklenes spinn.

Løsning

(a) Når partiklene er bosoner kan de befinne seg i samme kvantetilstand. Bølgefunksjonen skal være symmetrisk ved ombytte av de to partiklene. Den laveste energi-egentilstanden er dermed

$$\psi_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_1(\mathbf{r}_2) \tag{59}$$

med energi $E = 2E_1$.

(b) Når partiklene er fermioner kan de *ikke* befinne seg i samme kvantetilstand. Bølgefunksjonen skal være antisymmetrisk ved ombytte av de to partiklene. Den laveste energi-egentilstanden er dermed

$$\psi_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}\left[\psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2) - \psi_2(\mathbf{r}_1)\psi_1(\mathbf{r}_2)\right]\,. \tag{60}$$

med energi $E = E_1 + E_2$.

Vi ser at energien til to-fermion systemet er større enn energien til to-boson systemet.