UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK
Gruppe for anvendt optikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Hans M. Pedersen
Tlf.: 3587

EKSAMEN I FAG 74181 OPTIKK
Onsdag 11. desember 1991
Tid: kl. 0900–1300

Tillatte hjelpemidler:

Godkjent lommekalkulator
K. Rottmannn: Matematische Formelsammlung
C. Barrett, T.M. Crown: Mathematical Formulae
K.J. Knutsen: Formler og data i fysikk

(Delspørsmålene har tilnærmet samme vekt)

Oppgave 1

To tynne linser L_1 og L_2 med fokallengder f_1 og f_2 er montert etter hverandre i luft ($n = 1$) med en innbyrdes avstand d. L_1 har aperture med diameter D og L_2 har aperture med diameter $2D$.

a) Finn elementene til systemmatrisen $S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ (fra første til siste flate i det sammensatte systemet) uttrykt som funksjoner av f_1, f_2 og d.

b) Finn posisjon av de to hovedplanene (referert til første og siste flate i systemet), og avstanden mellom dem uttrykt som funksjoner av f_1, f_2 og d.

c) Sett inn tallverdier i formlene funnet foran og skisser systemet og merk av kardinalpunktene (hovedplanene og fokalpunktene) for $f_1 = 10$ cm, $f_2 = -5$ cm og $d = 7,5$ cm.

I resten av oppgaven antar vi at $f_1 + f_2 = d$ slik at vi har et såkalt telesentrisk system.

d) Finn overgangsmatrisen mellom et objektplan i en avstand s foran L_1 og et billedplan i en avstand s' bak L_2. Vis at ved avbildning reduseres denne til:

$$O_{ss'} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix}.$$

e) Hva er avbildningsligningen i dette tilfellet (sammenhengen mellom s og s')? Hva er systemets forstørrelse β? Hva er systemets fokallengde? Har vi hovedplan i dett tilfellet, og hvor er de i så fall plassert?

f) Anta at $f_1 = f_2$, og at $s = f_1$. Finn aperturblenden for avbildningen, og plassering og størrelse av utgangspupillen, for $f_1 = 15$ cm og $D = 1$ cm.

g) Hva er blendertallet ($F-$ tallet) for avbildningen? Anta at $\lambda = 500$ nm. Hva er minste avstand mellom to billedpunkter som akkurat kan adskilles.

Oppgave 2

Et Fabry–Perot interferometer med kontrast $F = 95$ brukes til å analysere finstrukturen i et smalt spektrum. For enkelhets skyld antar vi at spekteret er en dublett med midlere bølgelengde $\lambda = (\lambda_1+\lambda_2)/2 = 500$ nm og $\lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}5$ nm. Vi antar også loddrett innfall slik at $\theta = 0$.

a) Hva er maksimal og minimal transmisjon gjennom interferometeret? Ved hvilke bølgelengder får vi konstruktiv interferens (maksimal transmisjon) ved en gitt separasjon d mellom speilene?

b) Skisser opp transmisjonskurven som funksjon av bølgelengde for en gitt separasjon d mellom speilene. Indiker på figuren hva som er det fri spektrale området ("free spectral range") $(\Delta\lambda)_{sr}$, og hva som er den minste bølgelengdeforskjellen $\Delta\lambda$ som instrumentet kan oppløse.

c) Utled en formel for det fri spektrale området som funksjon av midlere bølgelengde λ og speilavstanden d.

d) Anta at $d = 0{,}5$ mm. Hva er instrumentets fri spektrale område når $\lambda = 500$ nm? Er dette et fornuftig valg av parametere dersom vi vil bruke instrumentet til å analysere de to spektrallinjene? Svaret skal begrunnes.

e) Forklar kvalitativt hva som skjer dersom speilene har så lav reflektivitet at F blir liten (f.eks. $F \approx 1$ eller mindre). Skisser den spektrale transmisjonskurven for dette tilfellet (på samme måte som i deloppgave b)).

Oppgitt:

For en tynn linse (og mellom hovedplan i et sammensatt system) er systemmatrisen gitt som:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}.$$

Translasjonsmatrisen for en avstand s (i $+z$ retning) er gitt som:

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hovedplanene H_1 og H_2 ligger, henholdsvis, en avstand h_1 foran første flate og en avstand h_2 bak siste flate i det sammensatte systemet, hvor:

$$h_1 = (1-D)/C, \quad h_2 = (1-A)/C,$$

og A, B, C, D er elementene til systemmatrisen S. Mellom hovedplanene H_1 og H_2 har vi avbildning med forstørrelse $\beta = 1$.

F – tallet (blendertallet) for en aperture som utgjør en radiell vinkel γ_m' sett fra et billedpunkt på aksen er

$$F' = 1/(2\sin\gamma_m').$$

Rayleighgrensen for oppløsning er gitt av:

$$\Delta x = 1{,}22\ \lambda F'.$$

Transmisjonen i et Fabry–Perot interferometer er gitt av

$$T = \frac{1}{1+F\ \sin^2(\delta/2)},$$

hvor F er interferometerets kontrast og fasedifferansen (med luft mellom speilene slik at $n_2 = 1$) er gitt av

$$\delta = 4\pi d\cos\theta/\lambda.$$

Instrumentets finesse er gitt ved:

$$\mathcal{F} = \frac{(\Delta\lambda)_{sr}}{\Delta\lambda} = \pi\sqrt{F}\,/4,$$

hvor $(\Delta\lambda)_{sr}$ er det fri spektrale området, og $\Delta\lambda$ er den minste bølgelengdedifferans som instrumentet kan oppløse.

Løsningsforslag – 1991

Oppgave 1

a)

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-d/f_1 & d \\ -(1/f_1+1/f_2-d/(f_1f_2)) & 1-d/f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

b)

$h_1=(1-D)/C = f_1d/(d-f_1-f_2)$, $h_2=(1-A)/C = f_2d/(d-f_1-f_2)$

Avstand $H_1-H_2 = h_1+h_2+d = d^2/(d-f_1-f_2)$.

c)

$A = 1-d/f_1 = 0.25$

$B = d = 7.5$ cm

$C = -(1/f_1+1/f_2-d/(f_1f_2)) = -0.05\ \mathrm{cm}^{-1}$

$D = 1-d/f_2 = 2.5$

$h_1 = 30$ cm, $h_2 = -15$ cm.

Avstand $H_1-H_2 = 22.5$ cm

d) $f_1+f_2 = d \Rightarrow$

$$S = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & f_1+f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix}$$

$$O_{ss'} = \begin{bmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & f_1+f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & f_1+f_2-sf_2/f_1-s'f_1/f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$. Ved avbildning: $B' = 0 \Rightarrow O_{ss'} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix}$ QED.

e) $B' = 0 \Rightarrow s' = -(f_2/f_1)^2 s + (f_1+f_2)f_2/f_1$.

$\beta = A' = -f_2/f_1$
$f = -1/C' \to \infty$.
Ingen hovedplan (med β=1) siden β alltid er den samme.

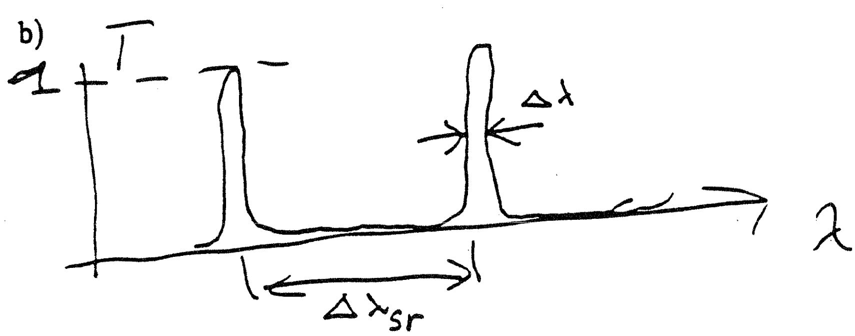
f) Objektpunkt på aksen gir parallell strålegang mellom linsene (siden $s = f_1$). Da må linse L_1 være apertureblende og inngangspupille (siden den er minst). Den avbildes til utgangspupillen (2f–avbildning) av L_2 med forstørrelse 1. Utgangspupillenligger derfor $2f_1 = 30$ cm bak L_2 (dvs 15 cm bak bildet) og har diameter 1 cm.

g) $F = 15\text{cm}/1\text{cm} = 15$. $\Delta x = 1.22\lambda F = 1.22 \cdot 500\text{nm} \cdot 15 = 9.15\ \mu\text{m}$.

Oppgave 2

a) $T_{max} = 1$ for $\delta = 2\pi m$ (m heltall), $T_{min} = 1/(1+F) = 1/96$ for $\delta = 2\pi(m+1/2)$.
$\delta = 4\pi d/\lambda = m2\pi \Rightarrow \lambda_m = 2d/m$.

b)



c) For $m \gg 1$: $\Delta\lambda_{sr} = \lambda_m - \lambda_{m+1} = 2d(1/m - 1/(m+1)) = 2d/[m(m+1)] \approx 2d/m^2$
$\lambda = (\lambda_m + \lambda_{m+1})/2 = d(1/m + 1/(m+1)) = 2d(m+1/2)/[m(m+1)] \approx 2d/m$

=> $m = (2d)/\lambda$ og $\Delta\lambda_{sr} = (2d)/m^2 = \lambda^2/(2d)$. Dvs $\Delta\lambda_{sr}/\lambda = \lambda/(2d)$.

d) $\Delta\lambda_{sr} = \lambda^2/(2d) = (5\cdot10^{-7})^2/10^{-3}\text{m} = 25\cdot10^{-11}\text{m} = 2.5$ Å.
Dette er mindre enn $\lambda_2 - \lambda_1 = 0.5$ nm $= 5$ Å, så vi kan ikke analysere de to spektrallinjene uten å redusere d ytterligere.

3) Vi får fortsatt 100% transmisjon ved konstruktiv interferens, men minimum $1/(1+F)$ øker til mer enn 50%. Variasjonen vil være nær cosinusformet (bare første indre refleksjon bidrar vesentlig => 2 bølgeinterferens dominerer)