UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK
Gruppe for anvendt optikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Hans M. Pedersen
Tlf.: 73–593587

EKSAMEN I FAG 74181 OPTIKK
Tirsdag 14. desember 1993
Tid: kl. 0900–1300

Tillatte hjelpemidler:

Godkjent lommekalkulator
Rottmannn: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
K.J. Knutsen: Formler og data i fysikk

(Delspørsmålene har tilnærmet samme vekt)

Oppgave 1

To tynne, positive linser L_1 og L_2 har samme fokallengde $f_1 = f_2 = f = 10$ cm og står etter hverandre i luft i innbyrdes avstand $t = f$. Linsene har innfatninger med samme diameter $D_1 = D_2 = D = 2$ cm. Anta at brytningsindeks for luft er $n = 1$. Beregningsresultater skal gis både som formel– og tallsvar.

a) Finn elementene i systemmatrisen (fra første til siste vertekspunkt). Hva er fokallengden for det sammensatte systemet? Finn matrisen for strålegang fra et plan i en avstand d foran første verteksunkt til et plan en avstand d' etter siste verteks-punkt.

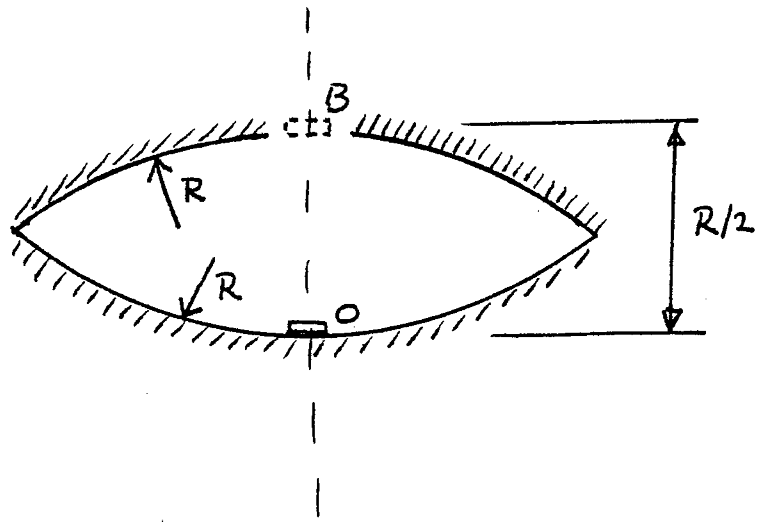
b) Hva er betingelsen for avbildning mellom de to planene? Vis at avbildningsrelasjonen kan skrives som $dd' = f^2$ og at forstørrelsen er $\beta = -f/d'$. Tegn grafer som viser hvordan d' og β varierer som funksjon av d (i området $d \in [-\infty, \infty]$). Angi hvilke betingelser d og d' må oppfylle for at, henholdsvis, objekt– og billedpunkt skal være reelle, og for at de skal være virtuelle.

c) Hvordan defineres hovedplanene H og H' og hvor ligger de for dette systemet? Er de reelle eller virtuelle? Hvordan er avbildningsrelasjonen når vi refererer avstander til hovedplanene og ikke til første og siste vertekspunkt? Skisser systemet med de to linsene, hovedplanene H og H', og fokalpunktene F og F'. Skisser også strålegangen for avbildning av et punkt på aksen for $d = f$, og for $d > f$.

d) Hvordan defineres apertureblende og feltblende og de tilhørende pupiller og vinduer? Når $d \neq f$ vil alltid en av de to linseinnfatningene være apertureblende, mens den andre er feltblende. Finn apertureblende og feltblende både for objektavstander $d > f$ og for $d < f$. Finn plassering og størrelse av, henholdsvis, inngangspupille, utgangspupille, inngangsvindu og utgangsvindu for de to tilfellene. Hva skjer når $d = f$?

e) Finn billedfeltets diameter og vis at blendertallet i billedrommet er $F' = 5$ for $d > f$. Anta at objektet er en utstrakt Lambertkilde med radians $L = 10\ \mathrm{mW/(cm^2 sr)}$ og at vi har 2% refleksjonstap i hver flate i systemet. Beregn irradiansen i et billedpunkt på aksen. Hva skjer med irradiansen i bildet om vi går ut fra aksen?

f) Figuren viser et speilsystem for observasjon av reelle bilder som ble demonstrert i laboratoriet. Objektet O ligger på det nederste hulspeilet, optisk akse er vertikal, og i det øverste hulspeilet er det et hull ved aksen som muliggjør betraktning av det reelle bildet B. De to hulspeilene har samme krumningsradius R og avstanden mellom verteksspunktene er $R/2$. Tegn strålegangen for avbildning av et punkt på aksen (minimum to stråler). Spesifiser et ekvivalent system hvor hulspeilene er erstattet med linser. Skisser det ekvivalente systemet med strålegang for avbildning av et punkt på aksen.



Oppgave 2

Et diffraksjonsobjekt med transmittansfunksjon $t(x,y)$ står ved $z = 0$ og belyses med en konvergent kulebølge som, for $z = 0$, kan skrives som:

$$U_0(x,y,0) = Ae^{-ik\frac{(x^2+y^2)}{2d}}.$$

Det diffrakterte feltet $U(x,y,z)$ for $z \geq 0$ er gitt av den paraksiale diffraksjonsformelen som er oppgitt på neste side.

a) Hva er Fraunhoferdiffraksjon og hvor [dvs. for hvikle(n) z] finner vi det for kulebølgebelysning som her, og for planbølgebelysning? Vis at diffraktert felt og intensitet ved Fraunhoferdiffraksjon kan uttrykkes ved fouriertransformasjonen av objekttransmittansen.

b) La objektet være en rektangulær åpning med sidekanter L_x og L_y. Vis at $T(k_x,k_y) = L_xL_y\mathrm{sinc}(k_xL_x/2)\mathrm{sinc}(k_yL_y/2)$ og finn uttrykkene for diffraktert felt og intensitet i planet $z = d$. Vis at intensitetsfordelingen kan uttrykkes som:

$$I(x,y,d) = I(0,0,d)\mathrm{sinc}^2(\frac{kL_xx}{2d})\mathrm{sinc}^2(\frac{kL_yy}{2d}).$$

c) Skisser intensitetsfordelingen langs x–aksen i diffraksjonsmønsteret. Hva er avstanden ut til første nullpunkt i diffraksjonsmønsteret for $\lambda = 500$ nm, $d = 50$ cm og $L_x = 5$ mm ? Hvordan endres denne dersom, henholdsvis, d og L_x dobles? Hvordan blir intensitetsfordelingen ved $z = d$ dersom både L_x og $L_y \to 0$ (dvs. når de er $<< \lambda$) ? Hva slags bølge har vi da?

d) La den transparente delen av objektet være et cosinusgitter i x–retning:

$$t(x,y) = [1+\cos(2\pi x/\Lambda)]/2$$

med $\Lambda = 500$ μm [1 μm = 10^{-6} m]. Hva er gitterets romfrekvens? Hvordan blir nå diffraksjonsmønsteret (skisse med forklaring er tilstrekkelig, men beregninger er tillatt) og hvor stor avstand er det mellom diffraksjonsordenene?

e) Et "pin–hole" kamera benytter et lite hull til å projisere et "bilde" av et objektpunkt uten bruk av linse. Hullet må være så lite som mulig for at bildet skal bli skarpt, men ikke så lite at strålebunten fra et objektpunkt spres ut på grunn av diffraksjon. Anta at objektpunktet er uendelig langt unna, at hullet er kvadratisk og at skarpest mulig avbildning fås når L_x er lik avstanden ut til første nullpunkt i Fraunhoferdiffraksjonsmønsteret (da er stråleforbredningen p.g.a. diffraksjon lik hullbredden og vi vinner ingenting på å gjøre hullet mindre). Hva er hullbredden L_x og blendertallet F' i billedrommet når $\lambda = 500$ nm og $d = 50$ cm?

Oppgitte formler:

Translasjonsmatrise for avstand d: $\begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrise for tynn linse med fokallengde f: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f & 1 \end{bmatrix}$

Matrise for hulspeil med radius R: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix}$

Irradians på aksen i billedplan: $E = \int L s_z \mathrm{d}\Omega \approx L\Delta\Omega$

Blendertall i billedrommet: $F' = 1/(2\sin v_m') \approx 1/(2v_m')$

Paraksial diffraksjonsformel (Fresnel–diffraksjon):

$$U(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik[z+\frac{1}{2z}(x^2+y^2)]} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x',y',0) e^{ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2z}} e^{-ik(x'x+y'y)/z} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

Fouriertransformasjon: $T(k_x,k_y) = \mathcal{F}\{t(x,y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} t(x,y) e^{-i(k_x x+k_y y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Invers transformasjon: $t(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{T(k_x,k_y)\} = (\frac{1}{2\pi})^2 \iint_{-\infty}^{\infty} T(k_x,k_y) e^{i(k_x x+k_y y)} \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y$

Fourierteoremet: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ik_x x} \mathrm{d}x = 2\pi\delta(k_x)$; $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ik_x x} \mathrm{d}k_x = 2\pi\delta(x)$

Sinc–funksjonen: $\mathrm{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$; $\mathrm{sinc}(0) = 1$.