UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Gudmund Slettemoen
Tlf.: 93416/93419

EKSAMEN I FAG 74181 OPTIKK
Onsdag 16 august 1995
Tid: kl. 09^{00} - 13^{00}

Tillatte hjelpemidler:
- Godkjent lommekalkulator
- K. Rottman: Mathematische Formelsammlung
- C. Barrett, T.M. Cronin: Mathematical Formulae

(Delspørsmålene har tilnærmet samme vekt. Bruk enkle betraktninger der det er mulig)

Oppgave 1

For å besvare spørsmålene i denne oppgaven antar vi at avbildningen er diffraksjonsbegrenset, og at lyset er monokromatisk med bølgelengde $\lambda = 0.5$ µm.

En tynn linse L_1 med fokallengde $f_1 = -30$ mm avbilder et objekt med en forstørrelse $\beta = 1/3$ i luft.

a) Finn totalavstanden fra objekt til bilde.

Vi antar at lyset går fra venstre mot høyre. En tynn linse L_2 med fokallengde $f_2 = 25$ mm plasseres til høyre for den første linsa. Avstanden mellom linsene er 30 mm.

b) Finn fokallengden og posisjonene til hovedplanene for denne linsekombinasjonen.

Diametrene til den første linsa L_1 og andre linsa L_2 er henholdsvis $D_1 = 3$ mm og $D_2 = 7{,}5$ mm.

c) For hvilke objektposisjoner d_0 foran den første linsa L_1 er denne linsa apertureblender ?

Vi antar at objektet har en diffus overflate (Lambert reflektor) med refleksjonsevne R, at det har en meget stor transversal utstrekning, og at det belyses fra høyre mot venstre. Strålingsirradiansen normalt inn mot aksen i objektet kaller vi E (enhet: W/m^2).

d) Finn et uttrykk for strålingsirradiansen E inn mot aksen i bildet som funksjon av objektavstanden d_0 fram til den første linsa. Vi ser bort fra refleksjonstapene i linsene og regner paraksialt.

Vi antar nå at objektet er en sirkulær skive med diameter $D_0 = 6$ mm og ligger sentrisk på den optiske aksen.

e) For store objektavstander d_0 vil diffraksjon gjøre at resultatet fra delspørsmål d) nå ikke vil være gyldig. Forklar hvorfor. Gjør et overslag på hvor langt unna objektet da må ligge, og bestem hvordan irradiansen på aksen nå vil avhenge av d_0 for meget store d_0.

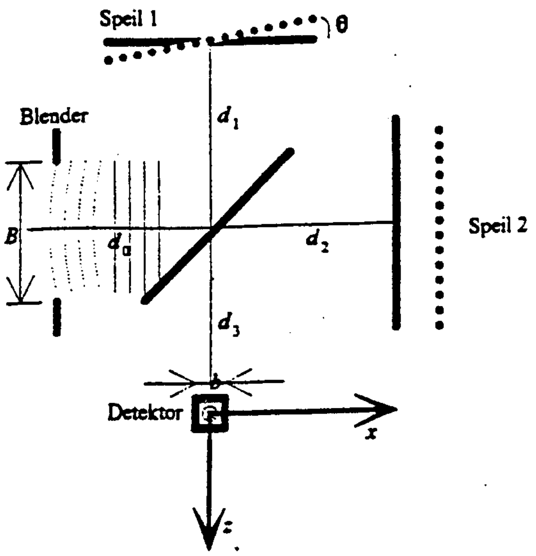
Oppgave 2

Vi antar at en skalar bølgebeskrivelse er tilstrekkelig, og at når noe annet ikke er anført er lyset monokromatisk med bølgelengden λ.

Lys diffrakteres fra et plant objekt. En av de planbølge-komponentene som oppstår forplanter seg i en retning gitt av bølgetallsvektoren $\boldsymbol{k}$.

a) Skriv opp sammenhengen mellom planbølgens bølgetalls- og vinkel-komponenter, og knytt disse til de tilhørende romfrekvenskomponentene i objektet. Illustrer også sammenhengene ved hjelp av en målsatt skisse.

En skjematisk skisse av et forenklet Michelsons interferometer med en tynn stråledeler (50/50%) er vist nedenfor.



Speil 1 kan tippes en vinkel θ om en vertikalakse (y-akse), og speil 2 kan paralellforskyves i x-retningen. Detektorens fotofølsomme flate er kvadratisk med bredder b i x- og y- retningene. Interferometeret belyses først med en planbølge med amplityde A som forplanter seg i x-retningen (se heltrukne bølgefronter på figuren). De aksiale avstandene fra stråledeler til henholdsvis speil 1, speil 2, og detektor er d_1, d_2, og d_3.

b) Finn de vinklene θ hvor detektoren ikke registrerer noe interferenssignal når speil 2 forflyttes.

c) Vi antar at speil 2 forflytter seg med hastigheten v. Beregn et matematisk uttrykk for modulasjonsgraden til detektorsignalet som funksjon av vinkelen θ.

Vi dekker til speil 1. Interferometeret belyses nå med en kulebølge som, reflektert via speil 2, konvergerer mot sentrum av detektoren. Bølgen har amplityde A ved en blender foran interferometeret. Denne blenderen er kvadratisk med bredder B i y- og z-retningene, og er plassert i avstanden d_0 foran stråledeleren. Se stiplede bølgefronter på figuren.

d) Beregn et matematisk uttrykk for det romfrekvensspekteret som den fokuserte bølgens amplitydefordeling gir ved detektorplanet.
Hvordan vil romfrekvensspekteret til den fokuserte bølgens intensitetfordeling se ut ? Skisser !

I resten av oppgaven antar vi at lyset er polykromatisk og kollimert, og at speil 1 ikke lenger er tildekt. Vinkelen $\theta = 0$.

e) Utled et uttrykk for den normaliserte koherensgraden $\gamma(\Delta d)$, der $\Delta d = 2(d_2 - d_1)$ er veilengdeforskjellen mellom de to interfererende bølgene.

f) Forklar hvordan interferometeret kan brukes til å finne kildens spektralfordeling $W(\omega)$, der ω (s^{-1}) er lysets vinkelfrekvens.

Oppgitt:

For en tynn linse med fokallengden f (og mellom hovedplan i et sammensatt linsesystem) er systemmatrisen gitt som:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}.$$

Translasjonsmatrisen for en geometrisk avstand d og brytningsindeks n er gitt som:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hovedplanene H og H' ligger henholdsvis i en avstand h foran første flate og en avstand h' bak siste flate i et sammensatt system, hvor:

$$h = \frac{(1-D)n}{C}, \qquad h' = \frac{(1-A)n'}{C}.$$

Systemets fokallengden er lik:

$$f = -\frac{1}{C}.$$

Fresnels diffraksjonsformel der objektet belyses med en bølge som konvergerer mot et punkt d til høyre for objektet:

$$U(x,y,z) = \frac{A_0}{i\lambda z} e^{ik\left[z + \frac{1}{2z}(x^2+y^2)\right]} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)}\, t(x',y')\, e^{-i\frac{k}{z}(xx'+yy')}\, e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}\, \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.$$

Den todimensjonale fouriertransformasjonen av en funksjon $t(x,y)$ er definert som:

$$T(k_x,k_y) = \mathcal{F}\{t(x,y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t(x,y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Den inverse transformasjonen er gitt av integralet:

$$t(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{T(k_x,k_y)\} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T(k_x,k_y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y\,.$$

To versjoner av konvolusjonsteoremet:

$$\begin{aligned} T_1(k_x,k_y) * T_2(k_x,k_y) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_1(k_x',k_y')\, T_2(k_x - k_x', k_y - k_y')\, \mathrm{d}k_x'\mathrm{d}k_y' \\ &= \mathcal{F}\{t_1(x,y)\, t_2(x,y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1(k_x,k_y)\, T_2(k_x,k_y) &= \mathcal{F}\{t_1(x,y) * t_2(x,y)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t_1(x',y')\, t_2(x-x', y-y')\, \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\right\} \end{aligned}$$