NTH NORGES TEKNISKE HØYSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Gudmund Slettemoen
Tlf.: 93416/93419

EKSAMEN I FAG 74181 OPTIKK
Torsdag 18. januar 1996
Tid: kl. 09^{00} - 13^{00}

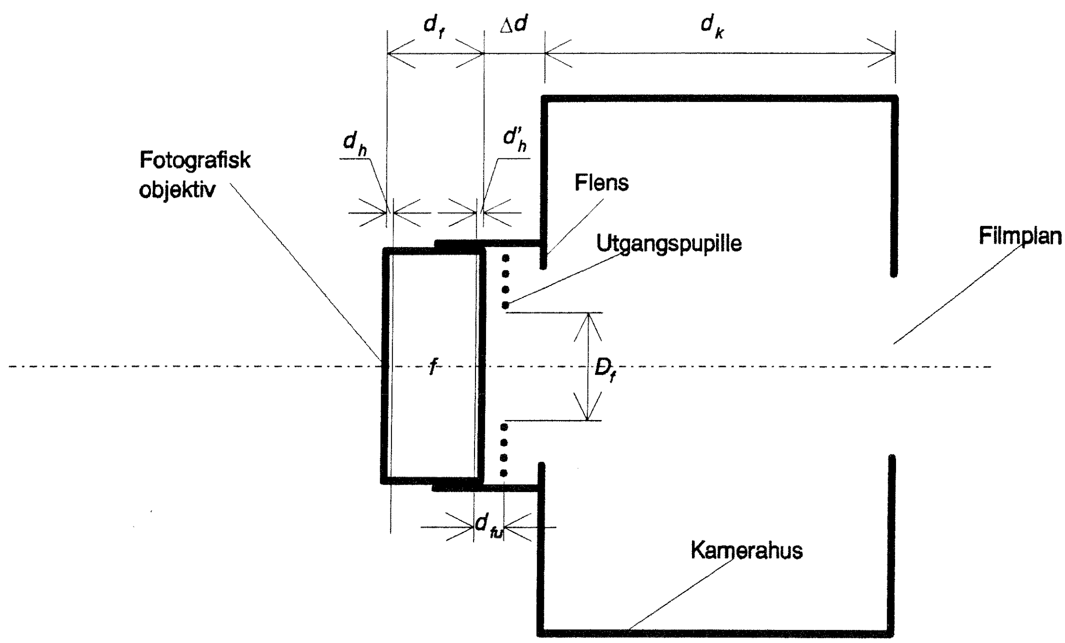
Tillatte hjelpemidler:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTH.
K. Rottman: Mathematische Formelsammlung
C. Barrett, T.M. Cronin: Mathematical Formulae

(Delspørsmålene har tilnærmet samme vekt. Bruk enkle betraktninger der det er mulig)

Oppgave 1

(Hint: baser alle utledningene i denne oppgaven på den paraksiale tilnærmelsen.)

Figuren nedenfor viser en skjematisk skisse av et fotografisk objektiv festet på et enkelt kamerahus. Objektivets fokallengde f er lik 50 mm. Objektivets innfatning har en lengde på d_f=13 mm, hvor første hovedplan ligger d_h=1 mm innenfor dets forkant og andre hovedplan ligger d_h'=1 innenfor dets bakkant. Avstanden d_{fu} fra det siste hovedplanet til utgangspupillen er 3 mm. Utgangspupillen har en diameter D_f på 12 mm. Avstanden d_k fra kamerahusets flens til filmplanet er 48 mm.



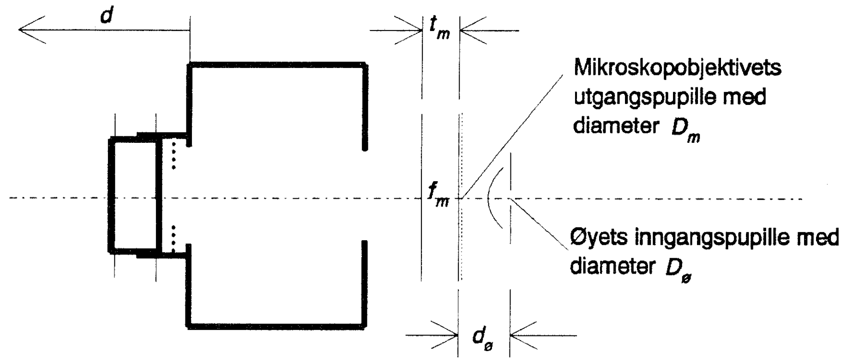
Fokusering foregår ved at objektivet forflyttes frem og tilbake. Objektivets bakkant kan maksimalt forflyttes opp til Δd=10 mm fra kamerahusets flens.

a) Målt fra kamerahusets flens, hvor nært kan kameraet avbilde objekter?

b) Anta at vi plasserer en monokromatisk punktkilde med bølgelengde λ=0,55μm i en transversal avstand y_p=5 mm fra den optiske aksen. Kilden er plassert i en avstand d_p=1 m foran det første hovedplanet. Kildepunktet avbildes til filmplanet.
Finn et matematisk uttrykk, som funksjon av transversale avstander (x,y), for feltamplituden til den bølgen vi får umiddelbart bak utgangspupillen når feltamplituden er lik U_p i en avstand r_p fra kildepunktet.

c) Vi antar nå at et punktkilden erstattes med et kvadratisk romlig inkoherent objekt. Dette objektet er sentrert på den optiske aksen, har transversale bredder x_0=50 mm, y_0=50 mm, og stråler som en Lambert kilde. Objektet er plassert i en avstand d_0=1 m foran første hovedplan.
Hvor mye endrer irradiansen på aksen i bildet seg prosentvis når vi øker d_0 til det dobbelte, det vil si til 2 m ?
Hvor mye endrer irradiansen inn mot objektivets inngangspupille seg prosentvis når vi øker d_0 fra 1 m til 2 m ?
Gi en kvalitativ begrunnelse for at resultatene virker fornuftige.

d) Som skjematisk vist i figuren nedenfor ønsker vi nå å bruke det fotografiske objektivet til visuell observasjon. Vi plasserer et mikroskopobjektiv mellom vårt øye og det fotografiske objektivet. Objektet plasseres i en fast avstand d=1 m fra kamerahusets flens, og mellombildet sammenfaller med filmplanet. Mikroskopobjektivet har en fokallengde på f_m=16 mm, og avstanden mellom dets hovedplan er t_m=10 mm. Mikroskopobjektivets utgangspupille har en diameter på D_m=4 mm og sammenfaller med det siste hovedplanet. Mikroskopobjektivet plasseres slik at øyet fokuserer på "uendeligheten". Øyets inngangspupille har en diameter på $D_ø$=3 mm og ligger i en avstand $d_ø$=20 mm bak mikroskopobjektivets utgangspupille.



Bestem om det er det fotografiske objektivet, mikroskopobjektivet, eller øyet som inneholder totalsystemets apertureblender.
Bruk matriseformalismen til å finne avstanden d_{ip} fra kameraets flens til totalsystemets inngangspupille.

e) Når øyet forflyttes sideveis formørkes deler av objektet. Hvor mye kan vi forflytte øyet sideveis fra den optiske aksen før vignettering gjør at også sentrum av objektet formørkes ?

Oppgave 2

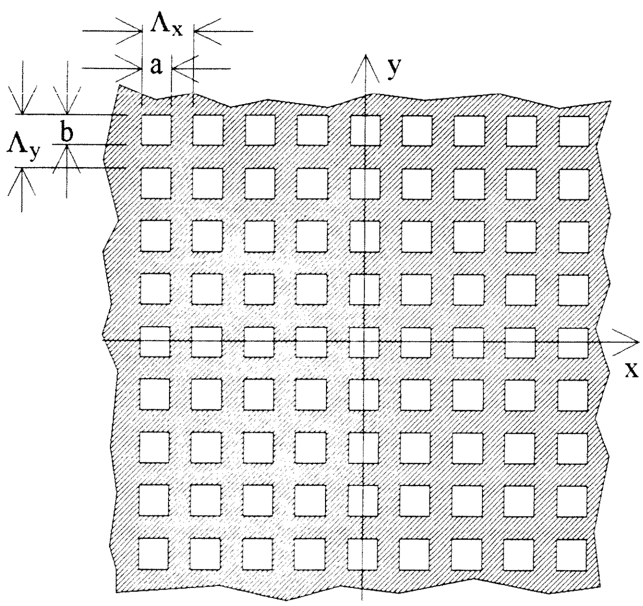
a) Ta utgangspunkt i et interferensforsøk og beskriv hva begrepet romlig koherens står for.

b) En plan bølge $U_0 = A_0 e^{ikz}$ belyser et objekt ved $z = 0$. Objektet har en amplitydetransmittans-funksjon $t_1(x,y)$. Vi søker et uttrykk for det diffrakterte feltet for $z>0$ uttrykt som en superposisjon av planbølger. Finn et uttrykk for følgende diffraksjons-objekt (cosinusgitteret) $t_1(x,y)$ med perioder (Λ_x, Λ_y), der:

$$t_1(x,y) = (A + B\cos(2\pi x / \Lambda_x))(A + B\cos(2\pi y / \Lambda_y))$$

c) Bak dette objektet plasseres en tynn linse med fokallengde f (>0) slik at planbølgene fokuseres i dens bakre fokalplan.
I hvilke avstander fra den optiske aksen fokuseres planbølgene og hvordan er forholdet mellom deres intensiteter ? (regn paraksialt og skisser i en målsatt graf).

d) Vi bytter ut cosinusgitteret med et todimensjonalt firkantgitter $t_2(x,y)$. En skisse av dette gitteret er vist nedenfor.



I denne figuren er de små firkantene åpninger med x-y dimensjoner (a,b) og perioder (Λ_x, Λ_y), mens det er optisk tett i det skraverte feltet mellom dem. Vi antar at objektet strekker seg til "uendeligheten". Sett opp et matematisk uttrykk for dette firkantgitteret, og vis at fourierrekken for gitteret kan skrives som:

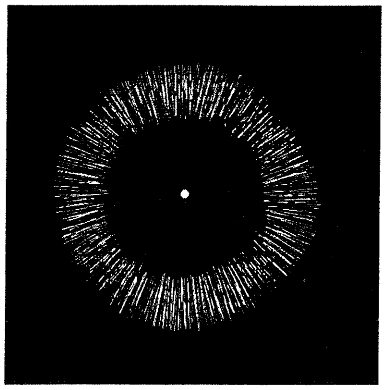
$$t_2(x,y) = \frac{ab}{\Lambda_x \Lambda_y} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n \frac{a}{\Lambda_x})}{(\pi n \frac{a}{\Lambda_x})} e^{i2\pi x \frac{n}{\Lambda_x}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi m \frac{b}{\Lambda_y})}{(\pi m \frac{b}{\Lambda_y})} e^{i2\pi y \frac{m}{\Lambda_y}}$$

(Hint: kan vises ved å foreta en fouriertransform etterfulgt av en invers fouriertransform).

e) Vi antar at den tynne linsen med fokallengden f representerer øyet til en observatør. Denne observatøren ser på et gatelys som står langt unna. Vi antar at gatelyset gir ut et konstant/hvitt fargespektrum. Lag en målsatt skisse, referert til netthinnas posisjoner

(x_n, y_n), av den lysfordelingen som observatøren ser rundt gatelyset for de to spesialtilfellene der $\Lambda_x = \Lambda_y = 2a = 2b$, og der $\Lambda_x = \Lambda_y = 10a = 10b$.

f) Observatøren tar vekk firkantgitteret og kikker deretter mot gatelyset gjennom et bilvindu med dugg/rim. Han forflytter øyet sideveis. På noen steder ser han gatelyset omgitt av en halo som "stråler" radielt ut fra sentrum og hvor lysstyrken avtar med økende radiusavstand. På andre steder endrer mønsteret seg til en radielt "strålende" ring. Hans skisse av dette siste mønsteret er vist nedenfor. Skissen viser gatelyset i midten. I området nærmest utenfor gatelyset er det et forholdsvis mørkt område. Utenfor der igjen vises den radielt "strålende" lysringen. Resten av mønsteret er lyssvakt.



Forklar kvalitativt hvordan dugget/rimet fordeler seg på bilvinduet når observatøren ser det skisserte mønsteret.

Oppgitt:

For en tynn linse med fokallengden f (og mellom hovedplan i et sammensatt linsesystem) er systemmatrisen gitt som:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}.$$

Translasjonsmatrisen for en geometrisk avstand d og brytningsindeks n er gitt som:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hovedplanene H og H' ligger henholdsvis i en avstand h foran første flate og en avstand h' bak siste flate i et sammensatt system med A,B,C,D-matrise-elementer, hvor:

$$h = \frac{(1-D)n}{C}, \qquad h' = \frac{(1-A)n'}{C}.$$

Systemets fokallengden er lik:

$$f = -\frac{1}{C}.$$

Et uttrykk for en divergerende(+)/konvergerende(-) skalar kulebølge som forplanter seg fra/mot et punkt er lik:

$$U = \frac{A}{r} e^{i(\pm kr - \omega t)}, \text{ der } \frac{\omega}{k} = c \text{ (lyshastigheten) og } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

r er radius-avstanden fra dette punktet.

Fresnels diffraksjonsformel der objektet belyses med en bølge som konvergerer mot et punkt d til høyre for objektet:

$$U(x,y,z) = \frac{A_0}{i\lambda z} e^{ik\left[z + \frac{1}{2z}(x^2+y^2)\right]} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)}\, t(x',y')\, e^{-i\frac{k}{z}(xx'+yy')}\, e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}\, \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.$$

Den todimensjonale fouriertransformasjonen av en funksjon $t(x,y)$ er definert som:

$$T(k_x,k_y) = \mathcal{F}\{t(x,y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t(x,y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Den inverse transformasjonen er gitt av integralet:

$$t(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{T(k_x,k_y)\} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T(k_x,k_y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y.$$

To versjoner av konvolusjonsteoremet:

$$\begin{aligned} T_1(k_x,k_y) * T_2(k_x,k_y) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_1(k'_x,k'_y)\, T_2(k_x - k'_x, k_y - k'_y)\, \mathrm{d}k'_x \mathrm{d}k'_y \\ &= \mathcal{F}\{t_1(x,y)\, t_2(x,y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1(k_x,k_y)\, T_2(k_x,k_y) &= \mathcal{F}\{t_1(x,y) * t_2(x,y)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t_1(x',y')\, t_2(x-x', y-y')\, \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\right\} \end{aligned}$$

Comb-funksjonen er en periodisk sekvens av δ-funksjoner:

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$$

med fouriertransformasjonen:

$$\mathcal{F}\{\mathrm{comb}(x)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{ik_x n} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(k_x - 2\pi m) = \mathrm{comb}(\frac{k_x}{2\pi}).$$

Skalering av en δ-funksjon:

$$\delta(\frac{x}{\lambda}) = \lambda\,\delta(x).$$