NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Hans M. Pedersen, tlf. 93587 (mobil: 91 87 32 95)

Eksamen, SIF 4040: Optikk,

tirsdag 22. mai, 2001, tid: 09.00-13-00

Exam, SIF 4040: Optics,

Tuesday, May 22, 2001, time: 09.00-13.00

Innhold / Content:

I. Norsk oppgavetekst:

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste.
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Se også oppgitte formeler side 8-11.

Oppgave 1

Vi ser først på et teleobjektiv som består av to tynne linser: En positiv linse L_1 med fokallengde f_1 = 15 cm og diameter D_1 = 5 cm, etterfulgt av en negativ linse L_2 med fokallengde $f_2 = -10$ cm og diameter D_2 = 1.5 cm. Linsene står i luft (n =1) en avstand t = 12 cm fra hverandre. Vi antar at linseinnfatningene er de eneste blendene som avgrenser strålegangen.

a) Beregn systemmatrisen (fra første til siste verteksplan) og finn fokallengden f for systemet.

b) Finn plasseringen av fokalpunktene (F og F') og hovedplanene (H og H').

Hvor stor er den fysiske lengden av systemet (fra første flate til billedplanet) når det brukes til å avbilde fjerne objekter?

c) Finn apertureblenden og feltblenden ved avbildning av fjerne objekter.

Hvor stor synsvinkel har systemet (dvs. hvor stor er vinkelutstrekningen til inngangsvinduet)?

Vi ser nå på et tilfelle som man ofte møter i praktisk optikk: Anta at vi har en gitt avstand L = 1 m mellom objekt- og billedplan, og at vi vil bruke en tynn linse til å avbilde mellom de to planene med 4 gangers forstørrelse.

d) Hvilken fokallengde må vi velge, og hvor må vi plassere linsen?

Oppgave 2

En He-Ne laser med avstand L mellom speilene kan bare emittere diskrete bølgelengder λ_m som oppfyller resonansbetingelsen: $L = m\ \lambda_m/2$, $m = 1, 2, 3,..$osv. Anta at $L = 30$ cm, og at bare to av disse bølgelengdene faller innenfor den smale spektrallinjen med midlere bølgelengde $\lambda = 633$ nm, hvor vi har laservirkning. Vi antar at de to bølgelengdene emitteres med samme intensitet.

a) Vis at bølgelengdedifferansen med god nøyaktighet er gitt ved:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}.$$

Hvor stor er bølgelengdedifferansen og den tilhørende frekvensdifferansen? (Anta at lyshastigheten er $c = 3\cdot 10^8$ m/s.)

Laseren brukes som lyskilde i et interferenseksperiment (f.eks. i holografi). Dersom vi bare hadde én bølgelengde ville intensiteten ha variert med gangforskjellen s som $1 + \cos(ks)$, hvor $k=2\pi/\lambda$.

b) Vis at med begge bølgelengdene vil intensiteten variere som

$$1+\cos\left(\frac{2\pi s}{\lambda}\right)\cos\left(\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}s\right).$$

Skisser denne funksjonen i en graf.

c) Ved visse gangforskjeller s blir interferensleddet borte. Hvilke?

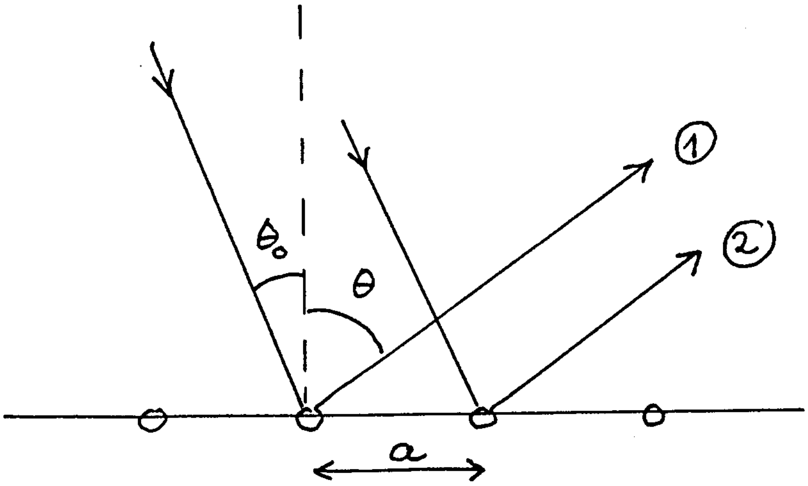
Ved andre gangforskjeller har vi full interferens. Hvilke?

d) Visibiliteten i et inteferensmønster er definért som: $V = \frac{I_{max} - I_{\min}}{I_{max} + I_{\min}}$.

Interferensleddet i b) består av et hurtig stripefunksjon og en langsom omhyllingskurve som bestemmer visibiliteten.

For hvilke verdier av s har vi $V(s) \geq 0.5$?

Oppgave 3



Figuren ovenfor viser et refleksjonsgitter med gitterkonstant a.

a) Vis at gangforskjellen mellom de to viste strålene er: $\Delta = a(\sin\theta - \sin\theta_0)$.

I en av lab.-oppgavene brukte vi millimeterskalaen på en stållinjal som diffraksjonsgitter for å målte bølgelengden for laserlys. Vi antar her at linjalen ligger på gulvet, at avstanden til veggen er $L = 5$ m, at bølgelengden er $\lambda = 633$ nm og at m-te diffraksjonsorden treffer veggen i høyde h_m. Gitterkonstanten er $a = 1$ mm.

b) Bruk gitterligningen eller interferensbetingelsen til å vise at

$$a\left(\sqrt{1-h_m^2/L^2} - \sqrt{1-h_0^2/L^2}\right) = m\lambda,\quad m = 0,\pm1,\pm1,....etc.$$

Anta at vi har funnet at $h_0 = 30$ cm.

c) Finn antallet diffraksjonsordener med høyde $h_m < 3h_0$

Et periodisk objekt har transmittansfunksjon

$$t(x,y) = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\pi x/a)\right].$$

Objektet står i planet $z = 0$ og belyses med en plan bølge $E_0 = A\exp(ikz)$ i z retning.

d) Vis at feltet for $z > 0$ kan uttrykkes som en superposisjon av tre plane bølger i hver sine retninger. Skriv opp uttrykk for hver av disse bølgene.

Hva skjer med feltet for $z > 0$ dersom $a < \lambda$?

II. English text

Allowed tools: B2 - Calculator with empty memory, according to approved list.

Rottmann: Matematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

See also the formulas given on pages 8-11.

Problem 1

We first consider a telephoto lens consisting of two thin lenses: A positive lens L_1 of focal length f_1 = 15 cm and diameter D_1 = 5 cm, followed by a negative lens L_2 of focal length $f_2 = -10$ cm and diameter D_2 = 1.5 cm. The lenses are placed in air (n =1) a distance t = 12 cm apart. We assume that the lenses are the only stops that limit the ray transfer.

a) Compute the system matrix (from the first to the last vertex plane) and find the focal length f of the system.

b) Find the locations of the focal points (F and F') and the principal planes (H and H').

What is the physical length of the system (from the first surface to the image plane) when it is used to image distant objects?

c) Find the aperture stop and the field stop for imaging of distant objects.

What angular field of view is covered by the system (i.e. what is the angular extent of the entrance window)?

We now consider a case that often occurs in practical optics: Assume that we have a given distance L = 1 m between the object and the image plane, and we want to use a thin lens to form an image with 4 times magnification.

d) What focal length should be chosen, and where should the lens be placed?

Problem 2

A He-Ne laser with mirror separation L can only emit discrete wavelengths λ_m that satisfies the resonance condition: $L = m\ \lambda_m/2$, $m = 1, 2, 3,..$etc. Assume that $L = 30$ cm, and that only two of these wavelengths are inside the narrow spectral line of average wavelength $\lambda = 633$ nm where laser action takes place. We also assume that the two wavelengths are emitted with equal intensities.

a) Show that the wavelength difference can be very accurately expressed as:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}.$$

How large is the wavelength difference and the corresponding frequency difference? (Assume that the velocity of light is $c = 3\cdot 10^8$ m/s.)

The laser is used as light source in an interference experiment (for example, in holography). With only one wavelength present the intensity would vary with the path-difference s as $1 + \cos(ks)$, where $k=2\pi/\lambda$.

b) Show that, with both wavelengths present, the intensity will vary as

$$1+\cos\left(\frac{2\pi s}{\lambda}\right)\cos\left(\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}s\right).$$

Sketch this function in a graph.

c) For certain path-differences s the interference term vanishes. Which ones?

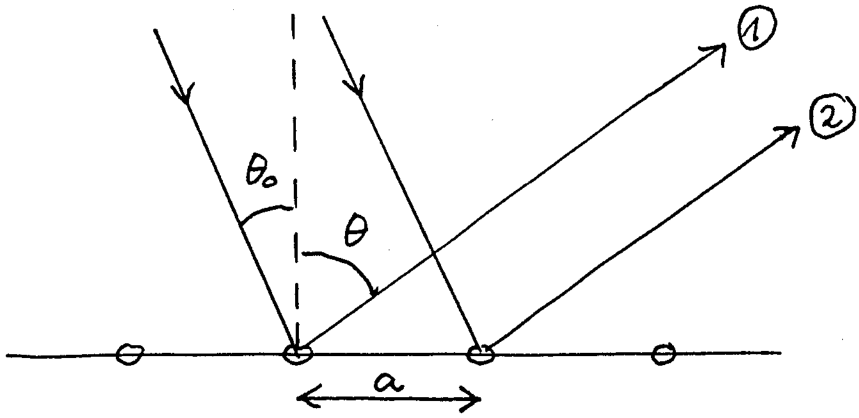
For other path-differences the interference term has maxima. Which ones?

d) The visibility of an inteference pattern is defined as: $V = \frac{I_{max} - I_{\min}}{I_{max} + I_{\min}}$.

The interference term in b) consists of a rapidly varying fringe finction with a slowly varying envelope that determines the visibility.

For which s do we have $V(s) \geq 0.5$?

Problem 3



The figure shows a reflection grating with grating constant a.

a) Show that the path length difference between the two ray-paths shown is:

$$\Delta = a(\sin\theta - \sin\theta_0).$$

In one of the lab.-experimets we used the millimeter scale of a steel ruler as a diffraction grating to measure the wavelength of the laser light. We here assume that the ruler is on the floor, that the distance to the wall is $L = 5$ m, the wavelength is $\lambda = 633$ nm, and that the mth diffraction order hits the wall at a height h_m. The grating constant is $a = 1$ mm.

b) Use the grating equation or the interference condition to show that

$$a\left(\sqrt{1-h_m^2/L^2} - \sqrt{1-h_0^2/L^2}\right) = m\lambda,\ \ m = 0,\pm1,\pm1,....etc.$$

Assume that we have found that $h_0 = 30$ cm.

c) Find the number of diffraction peaks with heights $h_m < 3h_0$.

A periodic object has the transmittance function: $t(x,y) = \frac{1}{2}[1+\cos(2\pi x/a)]$.

The object is in the plane $z = 0$ and is illuminated by the plane wave $E_0 = A\exp(ikz)$.

d) Show that, for $z > 0$, the field can be expressed as a superposition of three plane waves that propagate in different directions. Write down the expressions for each of the three plane waves.

What happens to the field at $z > 0$ if $a < \lambda$?

III. Oppgitte formeler / Given formulas:

- Translasjonsmatrise /Translation matrix: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Refraksjonsmatrise /Refraction matrix: $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}$

  (P = brytningsstyrke / refractive power)

- ABCD-loven/The ABCD-law: $\dfrac{d'}{n'} = -\dfrac{A\dfrac{d}{n} + B}{C\dfrac{d}{n} + D}$.

- Hovedplanavstander / Distances to principal planes: $\left.\begin{aligned} h &= n(1-D)/C, \\ h' &= n'(1-A)/C. \end{aligned}\right\}$

- Planbølge /Plane wave: $A\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = A\exp[i(ux+vy+wz)]$; $w = +\sqrt{k^2-u^2-v^2}$.

- Vinkelspekteret /The angular spectrum of plane waves:

$$E(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v,0)\exp[i(ux+vy+wz)]\,du\,dv$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v,0)\exp\left[i\left(ux+vy+z\sqrt{k^2-u^2-v^2}\right)\right]du\,dv.$$

$$A(u,v,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(x,y,0)\exp[-i(ux+vy)]\,dx\,dy.$$