NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Hans M. Pedersen, tlf. 93587 (mobil: 48 26 55 19)

Eksamen, SIF4040/MNFFY310: Optikk,

fredag 24. mai, 2002, tid: 09.00-15.00

Exam, SIF 4040/MNFFY310: Optics,

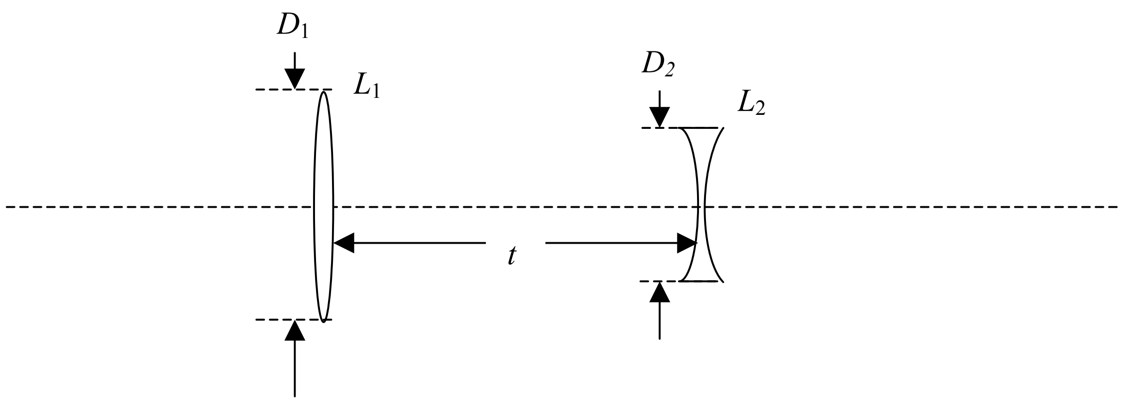
Friday, May 24, 2002, time: 09.00-15.00

Innhold / Content:

I. Norsk oppgavetekst:

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste.
Rottmann: Matematisk Formelsamling (alle språkutgaver)
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Se også oppgitte formeler side 10.

Oppgave 1



Figuren viser et sammensatt system som består av to tynne linser i luft (n = 1): En positiv linse L_1 og en negativ linse L_2 med fokallengder, henholdsvis, f_1= 15 cm og $f_2 = -3$ cm, og med innbyrdes avstand t.
Strålegangen begrenses av linsenes innfatninger med diametere, henholdsvis, D_1 = 5 cm og D_2 = 1 cm.

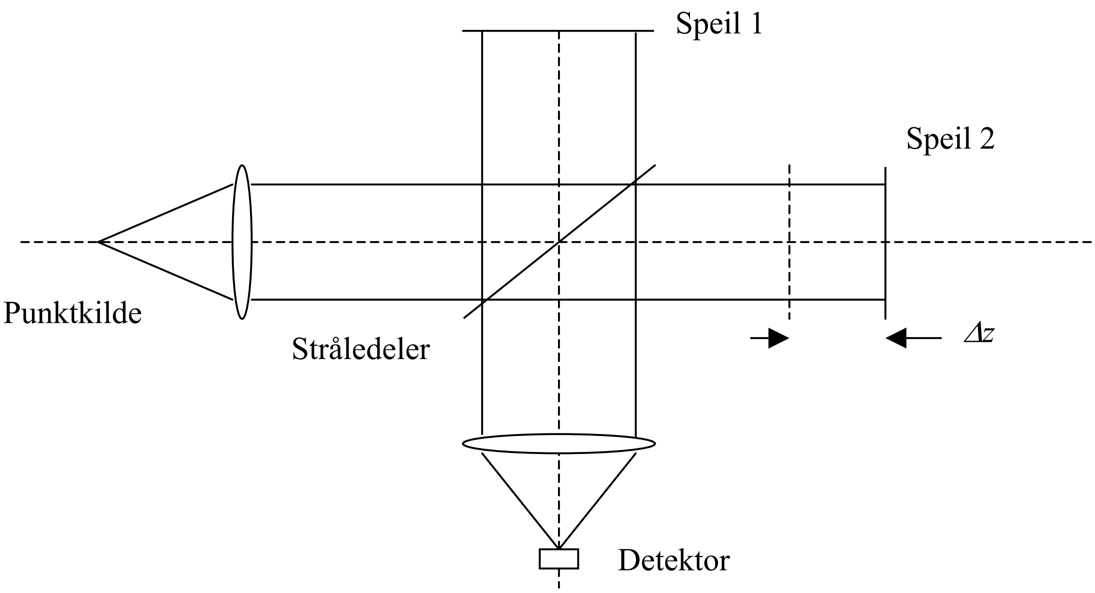
a) Finn elementene til systemmatrisen for det sammensatte systemet uttrykt ved f_1, f_2 og t. Fokallengden til det sammensatte systemet skal være f = 1 m. Hvilken avstand t må da velges? Her kreves både formel- og tallsvar.

b) Hvordan definerer vi systemets hovedplan (H og H')?
Finn plasseringene av disse (referert til L_1 for H , og referert til L_2 for H') uttrykt ved f_1, f_2 og t. Gi tallsvar for den valgte t verdien i a).

c) Anta at systemet foran brukes til å avbilde et objekt i uendelig. Hvor ligger da billedplanet, og hva blir den fysiske lengden av systemet (fra L_1 til billedplanet)? Gi både formel- og tallsvar. Hva slags system er dette?

d) Forklar hvordan vi definerer *apertureblenden* og de tilhørende *inngangs- og utgangspupillene* for et avbildningssystem.
Hva er en *hovedstråle*, og hvordan definerer vi *feltblenden* og de tilhørende *inngangs- og utgangsvinduene*?
Bestem hvilke av de to linseinnfatningene som er, henholdsvis, aperture- og feltblender for systemet ovenfor når det brukes til å avbilde et objekt i uendelig. Hva er vinkeldiameteren på det området som avbildes?

Oppgave 2



Figuren viser skjematisk et Michelson-interferometer med kollimert punktkildebelysning. Vi antar at de to interfererende bølgene har samme intensitet, og at interferometeret er perfekt oppjustert. Den detekterte intensiteten varierer da bare med gangforskjellen $s = 2\Delta z$, hvor Δz er forskyvningen av speil 2 fra posisjonen med null gangforskjell.

a) Skriv ned uttrykket for den detekterte intensiteten som funksjon av gangforskjellen s for en monokromatisk punktkilde med intensitet I_0 og vinkelfrekvens ω.
Skriv ned det tilsvarende uttrykket for en polykromatisk punktkilde med spektrum $W(\omega)$. [Hint: Kildeintensiteten fra spektralområdet $d\omega$ er nå $dI_0 = W(\omega)d\omega$]

Vis at resultatet kan uttrykkes ved hjelp av koherensfunksjonen

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty W(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega$$

som

$$I(s) = 2[\Gamma(0) + \mathrm{Re}\,\Gamma(s/c)],$$

hvor $c \approx 3\cdot 10^8$ m/s er lyshastigheten.

b) Anta at kildens spektrum er rektangulært med båndbredde $\Delta\omega$ omkring senterfrekvensen ω_0, dvs. at

$$W(\omega) = \begin{cases} I_0/\Delta\omega; \text{ for } & \omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega \le \omega \le \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega \\ 0; \text{ ellers} \end{cases}$$

Beregn koherensfunksjonen $\Gamma(\tau)$ for dette tilfellet og vis at detektert intensitet nå kan skrives som

$$I(s) = 2I_0\left[1 + \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\, s}{2c}\right)\cos(\omega_0\, s/c)\right],$$

hvor sinc(x) ≡ sin(x)/x.

c) Hvordan defineres *visibiliteten* i et interferensmønster?

Beregn visibiliteten som funksjon av gangforskjellen s for interferenssignalet i b).

Vis at dersom $\omega_0 = 10\Delta\omega$ kan svaret skrives som

$$V(s) = \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi s}{10\lambda_0}\right)\right|,$$

hvor λ_0 er bølgelengden ved senterfrekvensen ω_0.

d) Longitudinal *koherenslengde* l_c defineres som den gangforskjellen s hvor vi har første nullpunkt i visibiliteten. For $-l_c/2 \le s \le l_c/2$ har vi da interferensstriper med god visibilitet.

Finn uttrykk for longitudinal koherenslengde for visibilitetsfunksjonen i c) gyldig for vilkårlige $\Delta\omega < 2\omega_0$.

Hvor mange interferensstriper kan observeres i området $-l_c/2 \le s \le l_c/2$?

Oppgave 3

Et cosinusgitter har transmittansfunksjon

$$t(x,y)=\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\pi x/a)\right].$$

Objektet står i planet $z = 0$ og belyses med en plan bølge $U_0(z) = A\exp(ikz)$ i z retning.

a) Vis at feltet for $z > 0$ kan uttrykkes som en superposisjon av tre plane bølger i hver sine retninger. Skriv opp uttrykk for hver av disse bølgene og vis at totalfeltet kan uttrykkes som:

$$U(x,y,z)=\frac{A}{2}\left[\exp(ikz)+\cos(2\pi x/a)\exp\left(iz\sqrt{k^2-(2\pi/a)^2}\right)\right].$$

b) For visse avstander $z = z_m$ kan feltet i a) skrives som

$$U(x,y,z_m)=U_0(z_m)t(x,y)\,.$$

Finn uttrykk for disse avstandene hvor fri forplantning gir perfekt avbildning av gitteret, og vis at paraksialt har vi: $z_m = 2ma^2/\lambda$, $m = 1, 2, 3,\ldots$osv.

Bak gitteret plasseres en tynn linse med fokallengde $f = 20$ cm. Bølgelengden er $\lambda = 500$ nm og gitterkonstanten er $a = 0.01$ mm.

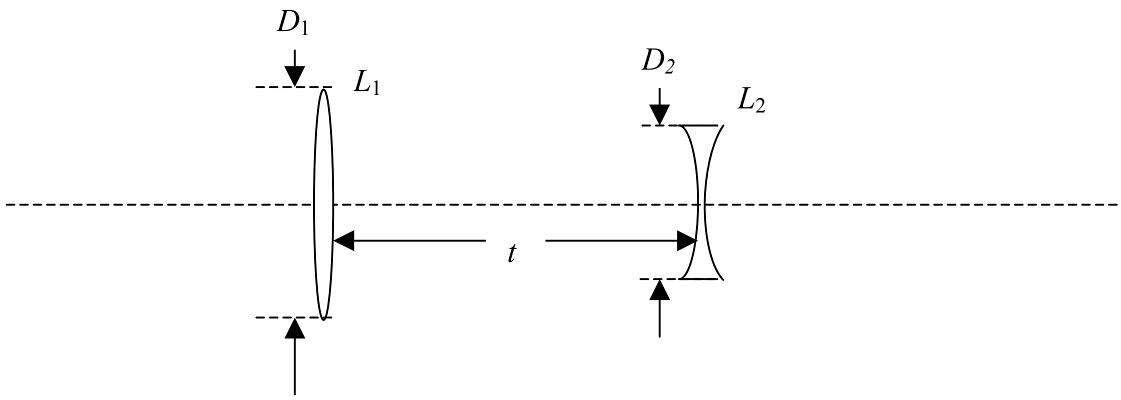
c) Hvordan blir intensitetsfordelingen i linsens bakre fokalplan?
Bestem plasseringen av alle diffraksjonsordenene.

d) Hva skjer med intensitetsfordelingen i c) dersom gitteret sideforskyves et stykke Δx? Svaret skal begrunnes.

II. English text

Allowed tools: B2 - Calculator with empty memory, according to approved list.
Rottmann: Matematisk Formelsamling (any language edition)
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
See also the formulas given on page 10.

Problem 1



The figure shows a composite system made up of two thin lenses in air (n = 1): One positive lens L_1 and one negative lens L_2, with focal lengths, respectively, f_1= 15 cm and f_2 = –3 cm, that are separated by a distance t.

The ray transfer is limited by the two lens holders with diameters, respectively, D_1 = 5 cm and D_2 = 1 cm.

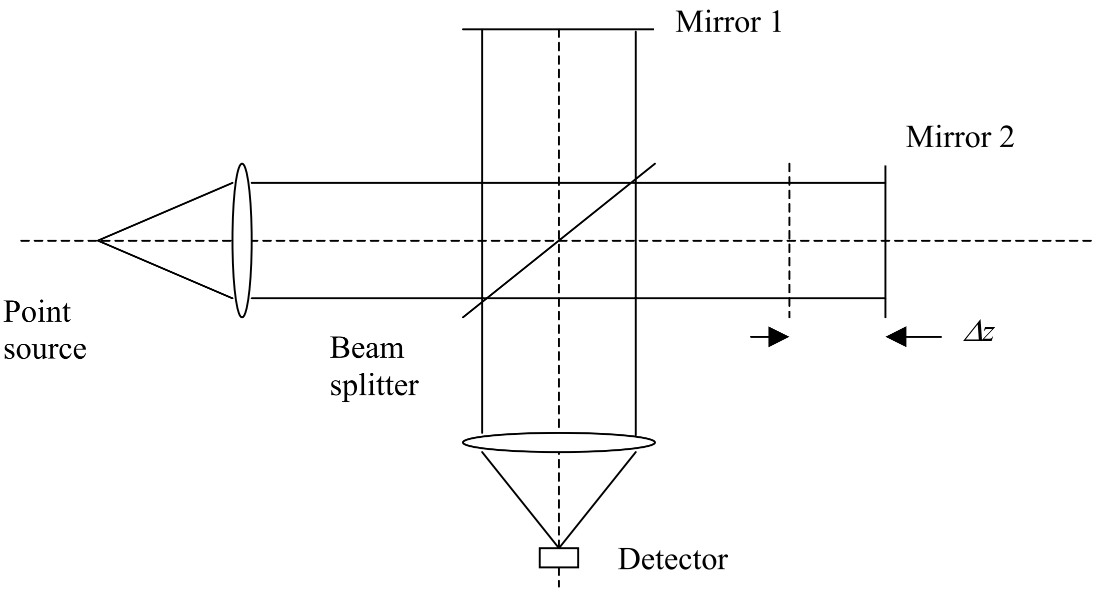
a) Find the elements of the system matrix for the composite system expressed as functions of f_1, f_2, and t.
We want the focal length of the composite system to be f = 1 m. Which separation distance t must then be chosen? Give the answer in terms of a formula and a numerical result.

b) How do we define the principal planes (H and H') of a system?
Find the locations of these planes (referred to L_1 for H, and referred to L_2 for H') expressed in terms of f_1, f_2, and t. Give numerical answers for the chosen t value in a).

c) Assume that the system above is used to image an object at infinity. What is the position of the image plane, and what is the physical length of the system (from L_1 to the image plane)? Give the answers in terms of both formulas and numerical results. What type of lens system is this?

e) Explain how we define the *aperture stop* and the corresponding *entrance*- and *exit pupils* for an imaging system.
What is meant by a *chief ray*, and how do we define the *field stop* and the corresponding *entrance* and *exit windows*?
Determine which of the two lens holders that are, respectively, the aperture stop and the field stop when the system above is used to image an object at infinity.
What is the angular diameter of the object field that is imaged?

Problem 2



The figure illustrates a Michelson-interferometer with collimated point-source illumination. We assume that the two interfering waves have equal intensities, and that the interferometer is perfectly aligned. The detected intensity is a function of the path-length difference $s = 2\Delta z$, where Δz is the displacement of mirror 2 from the position with zero path-length difference.

a) Write down the expression for the detected intensity as a function of the path-length difference s for a monochromatic point-source with intensity I_0 at the angular frequency ω.

Write down the corresponding expression for a polychromatic point-source with the spectral density $W(\omega)$. [Hint: The source intensity from the spectral range $d\omega$ is now $dI_0 = W(\omega)d\omega$]

Show that the result can be expressed in terms of the coherence function

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty W(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega$$

as

$$I(s) = 2[\Gamma(0) + \mathrm{Re}\,\Gamma(s/c)],$$

where $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s is the velocity of light.

b) Assume that the source spectrum is rectangular with a bandwidth $\Delta\omega$ around the center frequency ω_0, i.e., that

$$W(\omega) = \begin{cases} I_0/\Delta\omega; \text{ for } & \omega_0 - \tfrac{1}{2}\Delta\omega \le \omega \le \omega_0 + \tfrac{1}{2}\Delta\omega \\ 0; \text{ otherwise} & \end{cases}$$

Compute the coherence function $\Gamma(\tau)$ for this case, and show that the detected intensity can now be written as

$$I(s) = 2I_0\left[1 + \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\, s}{2c}\right)\cos(\omega_0\, s/c)\right],$$

where $\mathrm{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$.

c) How do we define the *visibility* of an interference pattern?

Compute the visibility as a function of the path-length difference s for the interference signal in i b).

Show that for $\omega_0 = 10\Delta\omega$ the answer can be written as

$$V(s) = \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi s}{10\lambda_0}\right)\right|,$$

where λ_0 is the wavelength at the center frequency ω_0.

d) The longitudinal *coherence length* l_c is defined as the path-length difference for which we have the first zero of the visibility. For $-l_c/2 \le s \le l_c/2$ we then have interference fringes with good visibility.

Find an expression for the longitudinal coherence length for the visibility function in c) that is valid for arbitrary $\Delta\omega < 2\omega_0$.

How many interference fringes are found in the range $-l_c/2 \le s \le l_c/2$?

Problem 3

A cosine-grating has the transmittance function

$$t(x,y) = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\pi x/a)\right].$$

The grating is in the plane $z = 0$ and is illuminated by a plane wave $U_0(z) = A\exp(ikz)$ in the z direction.

a) Show that the field for $z > 0$ can be expressed as a superposition of three plane waves in different directions.
Write down expressions for each of these three waves, and show that the total field can be expressed as:

$$U(x,y,z) = \frac{A}{2}\left[\exp(ikz) + \cos(2\pi x/a)\exp\left(iz\sqrt{k^2-(2\pi/a)^2}\right)\right].$$

b) At certain distances $z = z_m$ the field in a) can be written as

$$U(x,y,z_m) = U_0(z_m)t(x,y).$$

Find an expression for these distances at which free propagation yields perfect images of the grating, and show that we have $z_m = 2ma^2/\lambda$, $m = 1, 2, 3,\ldots$etc., in the paraxial approximation

Behind the grating we place a thin lens of focal length $f = 20$ cm. Assume that the wavelength is $\lambda = 500$ nm and the grating period is $a = 0.01$ mm.

c) What is the intensity distribution in the back focal plane of the lens?
Determine the positions of all the diffraction orders.

d) What happens to the intensity distribution in c) if the grating is displaced sideways a distance Δx? Give the reasons for the answer.

III. Oppgitte formeler / Given formulas:

- Translasjonsmatrise /Translation matrix: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Refraksjonsmatrise /Refraction matrix: $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}$

  (P = brytningsstyrke / refractive power)

- For en enkel brytende flate / for a single refracting surface: $P = \dfrac{n'-n}{R}$.

- ABCD-loven/The ABCD-law: $\dfrac{d'}{n'} = -\dfrac{A\frac{d}{n} + B}{C\frac{d}{n} + D}$.

- Hovedplanavstander / Distances to principal planes: $\left.\begin{array}{l} h = n(1-D)/C, \\ h' = n'(1-A)/C. \end{array}\right\}$

- Irradians / Irradiance: $E(\mathbf{r}) = \int L(\mathbf{r},\mathbf{s})\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}d\Omega$, ($\mathbf{n}$ = overflatenormal / surface normal)

- Planbølge /Plane wave: $A\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = A\exp[i(ux + vy + wz)]$;

$$w = +\sqrt{k^2 - u^2 - v^2}.$$

- Vinkelspekteret /The angular spectrum of plane waves:

$$U(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v,0)\exp[i(ux + vy + wz)]dudv$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v,0)\exp\left[i\left(ux + vy + z\sqrt{k^2 - u^2 - v^2}\right)\right]dudv.$$

$$A(u,v,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,y,0)\exp[-i(ux + vy)]dxdy.$$

- Fourier shift-theorem:

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}\exp(-iux_0) = F(u)\exp(-iux_0)$$
$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u - u_0)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\}\exp(iu_0x) = f(x)\exp(iu_0x)$$