NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Hans M. Pedersen, tlf. 93587 (mobil: 48 26 55 19)

Eksamen, SIF 4040/MNFFY 310: Optikk,

tirsdag 27. mai, 2003, tid: 09.00-15.00

Exam, SIF 4040/MNFFY 310: Optics,

Tuesday, May 27, 2003, time: 09.00-15.00

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste.
Rottmann: Matematisk Formelsamling (alle språkutgaver)
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Se også oppgitte formeler side 12.

Allowed tools: B2 - Calculator with empty memory, according to approved list.
Rottmann: Matematische Formelsammlung (any language edition)
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
See also the formulas given on pages 12.

Innhold / Content:

I. Norsk oppgavetekst:

Oppgave 1

Et system består av to tynne linser L_1 og L_2 i luft (n = 1) som står 16 cm fra hverandre og har fokallengder på henholdsvis f_1 = 24 cm og f_2= −16 cm. Begge linsene har aperturer med samme diameter D = 4 cm i linseplanet.

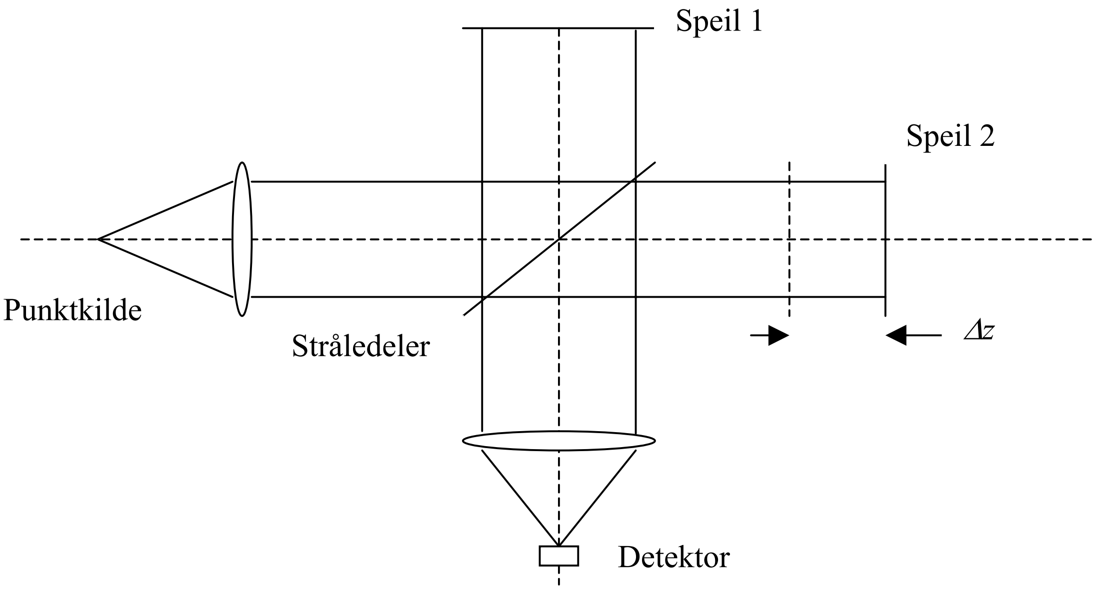
a) Finn elementene i systemmatrisen $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (fra første til siste flate i det sammensatte systemet). Hva er brytningsstyrken ("power") til det sammensatte systemet?

b) Finn posisjonene til fokalpunktene og hovedplanene for det sammensatte systemet.

c) Finn billedposisjonen for et objekt som står 144 cm foran første linse L_1. Hva er forstørrelsen?

d) Forklar hva som menes med begrepene *aperturblende, feltblende, inngangs*- og *utgangspupille* samt *inngangs*- og *utgangsvindu*.
Finn apertureblenden og utgangspupillen ved avbildning av objektet i c).
Hva er F-tallet i billedrommet?

Oppgave 2



Figuren viser skjematisk et Michelson-interferometer med kollimert punktkildebelysning. Vi antar at de to interfererende bølgene har samme intensitet, og at interferometeret er perfekt oppjustert. Den detekterte intensiteten varierer da bare med gangforskjellen $s = 2\Delta z$, hvor Δz er forskyvningen av speil 2 fra posisjonen med null gangforskjell.

a) Skriv ned uttrykket for den detekterte intensiteten som funksjon av gangforskjellen s for en monokromatisk punktkilde med intensitet I_0 og vinkelfrekvens ω.
Skriv ned det tilsvarende uttrykket for en polykromatisk punktkilde med spektrum $W(\omega)$. [Hint: Kildeintensiteten fra spektralområdet $d\omega$ er nå $dI_0 = W(\omega)d\omega$]
Vis at resultatet kan uttrykkes ved hjelp av den longitudinale koherensfunksjonen

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty W(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega$$

som

$$I(s) = 2[\Gamma(0) + \mathrm{Re}\,\Gamma(s/c)],$$

hvor $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s er lyshastigheten.

b) Anta at vi eksperimentelt har funnet at interferenssignalet har formen

$$I(s) = 2I_0\left[1 + \exp(-|s|/L)\cos(2\pi s/\lambda_0)\right],$$

hvor L = 5 mm og λ_0 = 500 nm.

Hvordan defineres *visibiliteten* i et interferensmønster?

Beregn visibiliteten som funksjon av gangforskjellen s for det gitte interferenssignalet.

Vis at den longitudinale koherensfunksjonen nå har formen

$$\Gamma(\tau) = I_0 \exp\left[-\left(|\tau|/T + i\omega_0\tau\right)\right] .$$

Bestem parameterene T og ω_0 (formel- og tallsvar).

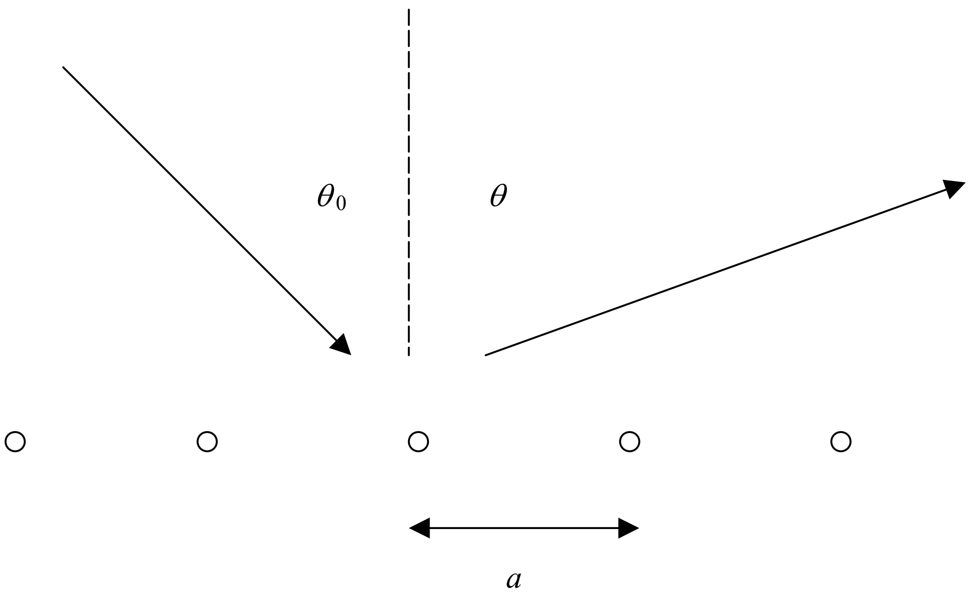
c) Beregn kildespekteret $W(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau$,

og vis at resultatet kan skrives som: $W(\omega) = \dfrac{I_0 T}{\pi}\dfrac{1}{1 + \left[(\omega - \omega_0)T\right]^2}$.

Dette er et Lorentz-spektrum.

d) Bestem senterfrekvensen og halvverdibredden omkring senterfrekvensen for Lorentz-linjen i c). (Gi både formel- og tallsvar)

Oppgave 3



Figuren illustrerer et horisontalt refleksjonsgitter med gitterkonstant a (avstanden mellom naboriller). Gitteret belyses med en monokromatisk planbølge og innfallsvinkelen er θ_0. Vi antar at innfallsplanet er normalt på gitterrillene. Rillene i gitteret sprer (reflekterer) den innfallende bølgen, og vi kan anta at hver rille sender ut en sylindrisk, reflektert bølge. Når vi betrakter det spredte lyset som funksjon av refleksjonsvinkelen θ, får vi reflektert lys (diffraksjonsordener) bare i bestemte retninger $\theta = \theta_m$ hvor lyset fra alle rillene interfererer konstruktive (i fase).

a) Vis at gangforskjellen mellom lys reflektert fra naboriller er $s = a(\sin\theta - \sin\theta_0)$.

b) Gi en ligning for retningen $\theta = \theta_m$ til $m$te diffraksjonsordenen.

I en av lab.-oppgavene brukte vi millimeterskalaen på en stållinjal som diffraksjonsgitter for å målte bølgelengden for laserlys. Vi antar her at linjalen ligger på gulvet, at avstanden til veggen er $L = 5$ m, at bølgelengden er $\lambda = 633$ nm og at m-te diffraksjonsorden treffer veggen i høyde h_m. Gitterkonstanten er $a = 1$ mm. Anta at vi har funnet at $h_0 = 30$ cm.

c) Finn antallet diffraksjonsordener med høyde $h_m < 3h_0$

Et periodisk objekt har transmittansfunksjon

$$t(x, y) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\pi x / a)\right].$$

Objektet står i planet $z = 0$ og belyses med en plan bølge $U_0 = A\exp(ikz)$ i z retning.

d) Vis at feltet for $z > 0$ kan uttrykkes som en superposisjon av tre plane bølger i hver sine retninger. Skriv opp uttrykk for hver av disse bølgene.

Hva skjer med feltet for $z > 0$ dersom $a < \lambda$?

II. English text

Problem 1

A system consists of two thin lenses L_1 and L_2 in air (n = 1) that are separated by a distance of 16 cm and have the focal lengths f_1 = 24 cm and f_2= −16 cm, respectively. Both lenses have apertures of equal diameters D = 4 cm in the lens planes.

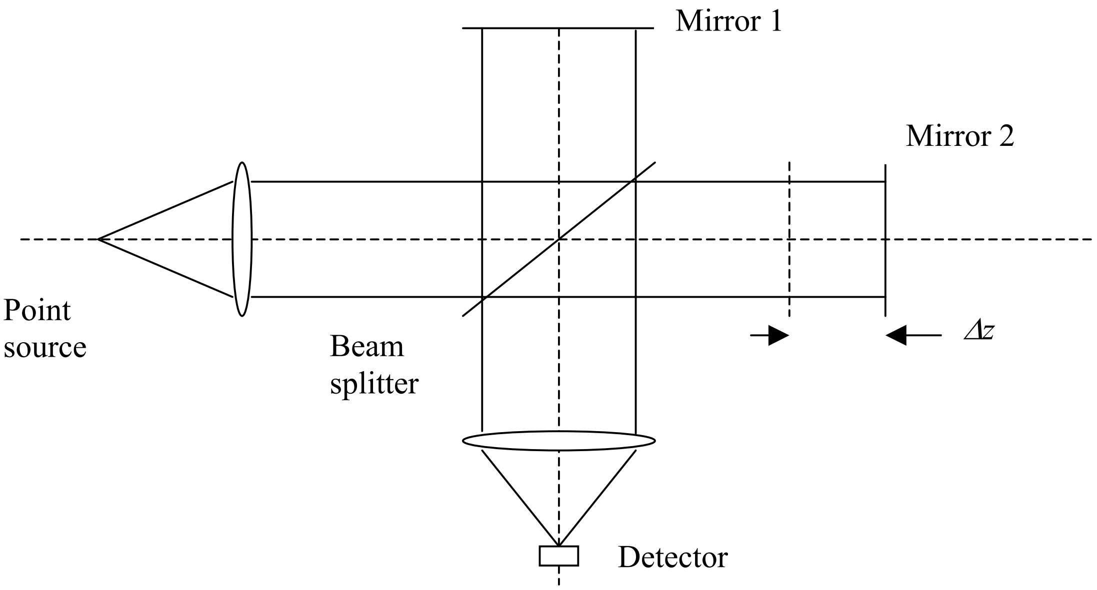
a) Find the elements of the system matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (from the first to the last surface of the composite system). What is the power of the composite system?

b) Find the positions of the focal points and the principal planes of the composite system.

c) Find the image position for an object that is 144 cm in front of the first lens L_1. What is the magnification?

d) Explain what is meant by the words: *aperture stop, field stop, entrance pupil, exit pupil, entrance window,* and *exit window.*
Find the aperture stop and the exit pupil for imaging of the object in c).
What is the F-number in image space?

Problem 2



The figure illustrates a Michelson-interferometer with collimated point-source illumination. We assume that the two interfering waves have equal intensities, and that the interferometer is perfectly aligned. The detected intensity is a function of the path-length difference $s = 2\Delta z$, where Δz is the displacement of mirror 2 from the position with zero path-length difference.

a) Write down the expression for the detected intensity as a function of the path-length difference s for a monochromatic point-source with intensity I_0 at the angular frequency ω.

Write down the corresponding expression for a polychromatic point-source with the spectral density $W(\omega)$. [Hint: The source intensity from the spectral range $d\omega$ is now $dI_0 = W(\omega)d\omega$]

Show that the result can be expressed in terms of the coherence function

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty W(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega$$

as

$$I(s) = 2[\Gamma(0) + \mathrm{Re}\,\Gamma(s/c)],$$

where $c \approx 3\cdot 10^8$ m/s is the velocity of light.

b) Assume that we experimentally have found that the interference signal has the form

$$I(s) = 2I_0\left[1 + \exp(-|s|/L)\cos(2\pi s/\lambda_0)\right],$$

where L = 5 mm and λ_0 = 500 nm.

How do we define the *visibility* of an interference pattern?

Find the visibility as a function of the path length difference s for the given interference signal.

Show that the longitudinal coherence function now has the form

$$\Gamma(\tau) = I_0 \exp\left[-\left(|\tau|/T + i\omega_0\tau\right)\right] .$$

Determine the parameters T and ω_0 (give both formulas and numerical answers).

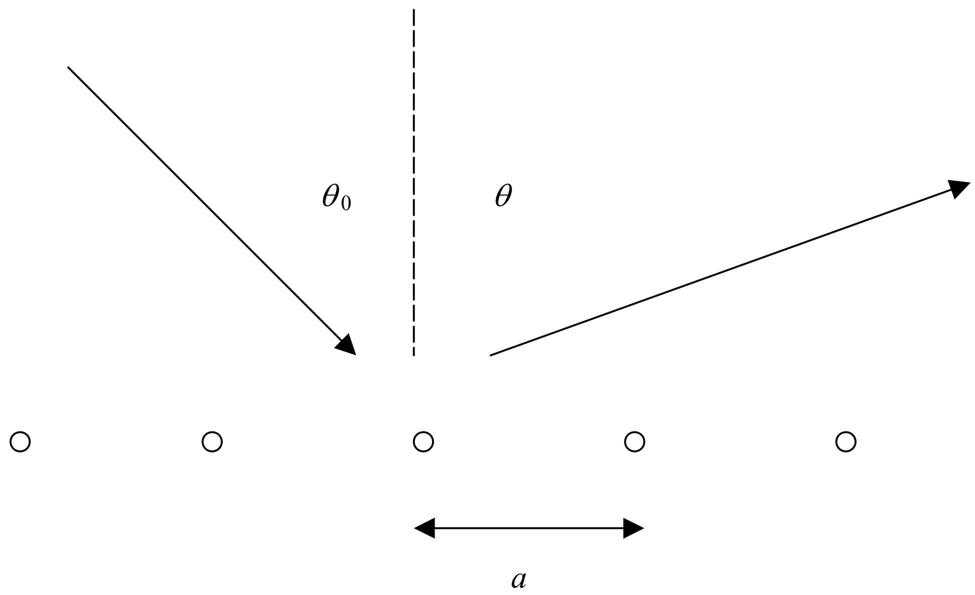
c) Compute the source spectrum $W(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau$,

and show that the result can be written as: $W(\omega) = \frac{I_0 T}{\pi}\frac{1}{1+\left[(\omega-\omega_0)T\right]^2}$.

This is a Lorentzian spectrum.

d) Determine the center frequency and the haf-width around this center frequency for the Lorentzian line in c). (Give both formulas and numerical answers)

Problem 3



The figure illustrates a horizontal reflection grating with grating constant a (the distance between adjacent grooves). The grating is illuminated by a monochromatic plane wave and the angle of incidence is θ_0. We will assume that the plane of incidence is normal to the grooves of the grating. The grooves of the grating scatters (reflects) the incident wave, and we can assume that each of them emits a cylindrical reflected wave. We consider the reflected light as a function of the refraction angle θ. We only have reflected light (diffraction orders) in certain directions $\theta=\theta_m$ for which the light reflected from all the groves interfere constructively (in-phase).

a) Show that the path-length difference between light reflected from adjacent grooves is $s = a(\sin\theta - \sin\theta_0)$.

b) Give an equation for the direction $\theta=\theta_m$ of the mth diffraction order.

In one of the lab.-experimets we used the millimeter scale of a steel ruler as a diffraction grating to measure the wavelength of the laser light. We here assume that the ruler is on the floor, that the distance to the wall is L = 5 m, the wavelength is λ = 633 nm, and that the mth diffraction order hits the wall at a height h_m. The grating constant is a = 1 mm. Assume that we have found that h_0 = 30 cm.

c) Find the number of diffraction peaks with heights $h_m < 3h_0$.

A periodic object has the transmittance function: $t(x,y) = \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2\pi x/a\right)\right]$.

The object is in the plane $z = 0$ and is illuminated by the plane wave $U_0 = A\exp(ikz)$.

d) Show that, for $z > 0$, the field can be expressed as a superposition of three plane waves that propagate in different directions. Write down the expressions for each of the three plane waves.

What happens to the field at $z > 0$ if $a < \lambda$?

III. Oppgitte formeler / Given formulas:

- Translasjonsmatrise /Translation matrix: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Refraksjonsmatrise /Refraction matrix: $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}$

  (P = brytningsstyrke / refractive power)

- For en enkel brytende flate / for a single refracting surface: $P = \dfrac{n' - n}{R}$.

- ABCD-loven/The ABCD-law: $\dfrac{d'}{n'} = -\dfrac{A\frac{d}{n} + B}{C\frac{d}{n} + D}$.

- Hovedplanavstander / Distances to principal planes: $\left.\begin{aligned} h &= n(1-D)/C, \\ h' &= n'(1-A)/C. \end{aligned}\right\}$

- Irradians / Irradiance: $E(\mathbf{r}) = \int L(\mathbf{r},\mathbf{s})\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}\,d\Omega$, ($\mathbf{n}$ = overflatenormal / surface normal)

- Planbølge /Plane wave: $A\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = A\exp[i(ux + vy + wz)]$;

$$w = +\sqrt{k^2 - u^2 - v^2}.$$

- Vinkelspekteret /The angular spectrum of plane waves:

$$U(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v,0)\exp[i(ux + vy + wz)]\,dudv$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v,0)\exp\left[i\left(ux + vy + z\sqrt{k^2 - u^2 - v^2}\right)\right]dudv.$$

$$A(u,v,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,y,0)\exp[-i(ux + vy)]\,dxdy.$$

- Fourier shift-theorem:

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}\exp(-iux_0) = F(u)\exp(-iux_0)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u - u_0)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\}\exp(iu_0x) = f(x)\exp(iu_0x)$$