NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Hans M. Pedersen, tlf. 93587 (mobil: 48 26 55 19)

Eksamen, TFY 4195/FY 3100: Optikk,

fredag 14. mai, 2004, tid: 09.00-15.00

Exam, TFY 4195/FY 3100: Optics,

Friday, May 14, 2004, time: 09.00-15.00

Tillatte hjelpemidler: C - Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Rottmann: Matematisk Formelsamling (alle språkutgaver)

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Se også oppgitte formeler side 11.

Sensuren faller: 7. juni 2004

Allowed tools: C – Specified printed aids. Specified, simple calculator.

Rottmann: Matematisk Formelsamling (any language edition)

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

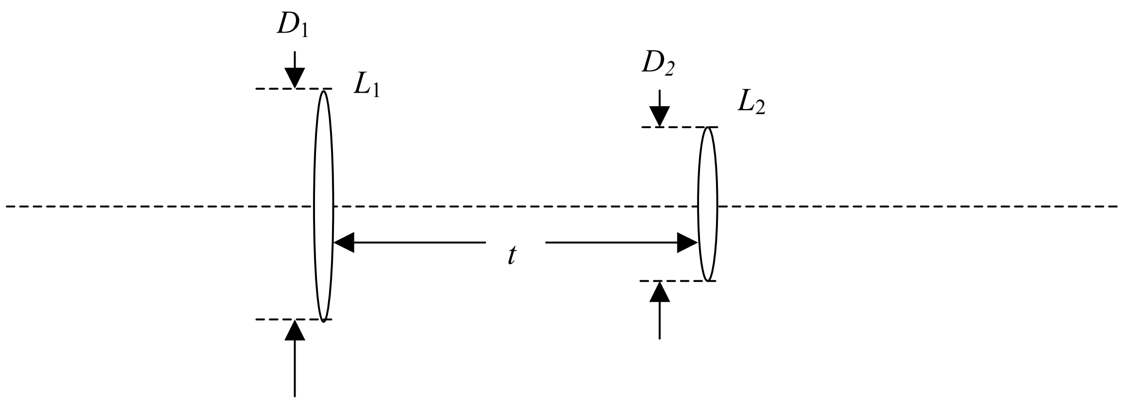
See also the formulas given on page 11.

Grades to be announced: June 7, 2004

Innhold / Content:

I. Norsk oppgavetekst:

Oppgave 1



Figuren viser et sammensatt system som består av to tynne linser i luft (n = 1), L_1 og L_2, med fokallengder, henholdsvis, f_1= 30 cm og f_2 = 5 cm, og med innbyrdes avstand $t = f_1 + f_2$ = 35 cm. Strålegangen begrenses av linsenes innfatninger med diametere, henholdsvis, D_1 = 8 cm og D_2 = 2 cm.

a) Finn elementene til systemmatrisen for det sammensatte systemet uttrykt ved f_1 og f_2.
Finn elementene til overgangsmatrisen som beskriver strålegangen fra et objektplan i avstand d foran L_1 til et plan i avstand d' bak L_2.
Anta at de to planene er konjugerte plan (bilder av hverandre). Hvilken betingelse må da overgangsmatrisen oppfylle?

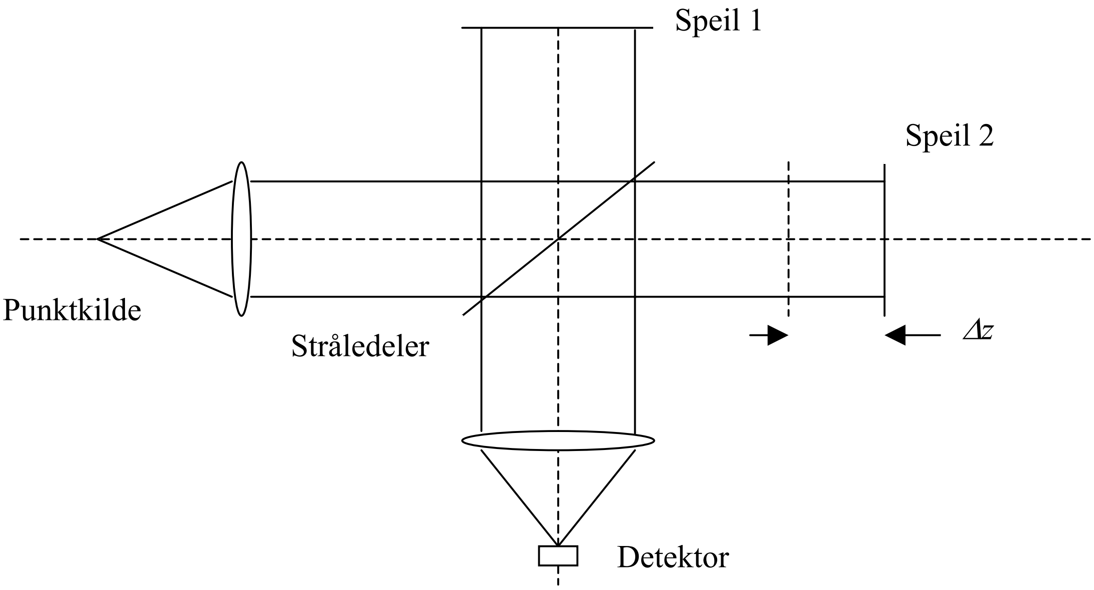
b) Bruk resultatene fra a) til å bestemme avbildningsrelasjonen (d' som funksjon av d) og forstørrelsen.
Hvordan defineres et systems *hovedplan*? Har dette systemet hovedplan, og hvor er de i så fall plassert? Hva slags system er dette?

c) Forklar hvordan vi definerer *apertureblenden* og de tilhørende *inngangs- og utgangspupillene* for et avbildningssystem.
Hva er en *hovedstråle*, og hvordan definerer vi *feltblenden* og de tilhørende *inngangs- og utgangsvinduene*?

Finn apertureblenden og feltblenden for systemet ovenfor når det brukes til å avbilde objekter i stor avstand ($d \rightarrow \infty$) foran L_1.
Hvor ligger de tilhørende pupillene og vinduene, og hvor store er de?

d) Anta at systemet brukes til visuell betraktning av fjerne objekter og at observatørens øye er plassert i systemets utgangspupille.
Hva er avstanden fra utgangspupillen til billedplanet (uttrykt ved objektavstanden d og forstørrelsen β)?
Hvor stor er den visuelle forstørrelsen ? (Hint: Se på bildets vinkelutstrekning sett fra utgangspupillen og objektets vinkelutstrekning sett fra inngangspupillen.)

Oppgave 2



Figuren viser skjematisk et Michelson-interferometer med kollimert punktkildebelysning. Vi antar at de to interfererende bølgene har samme intensitet, og at interferometeret er perfekt oppjustert. Den detekterte intensiteten varierer da bare med gangforskjellen $s = 2\Delta z$, hvor Δz er forskyvningen av speil 2 fra posisjonen med null gangforskjell. Ved hjelp av koherensfunksjonen

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty W(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega$$

hvor $\exp(x) \equiv e^x$ og $W(\omega)$ er kildens spektrale tetthet, kan interferensignalet skrives som

$$I(s) = 2\left[\Gamma(0) + \mathrm{Re}\,\Gamma(s/c)\right],$$

hvor $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s er lyshastigheten. Anta at kildespekteret er:

$$W(\omega) = \begin{cases} I_0\,,\ \text{for } \omega_0 - \Delta\omega/2 \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega/2 \\ 0,\ \ \text{ellers} \end{cases},$$

hvor $\Delta\omega < \omega_0$.

a) Beregn $\Gamma(\tau)$ og det resulterende interferenssignalet for det oppgitte kildespekteret. Vis at interferensleddet kan skrives som produktet av $\cos(\omega_0 s/c)$ og en omhyllingsfunksjon.

b) Hvordan defineres *visibiliteten* i et interferensmønster? Bestem visibilitetsfunksjonen $V(s)$ for interferenssignalet i a). Første nullpunkt i visibilitetsfunksjonen brukes ofte som et mål på den longitudinale koherenslengde (bredden av det området hvor visibiliteten er høy). Bestem longitudinal koherenslengde l_c i dette tilfellet.

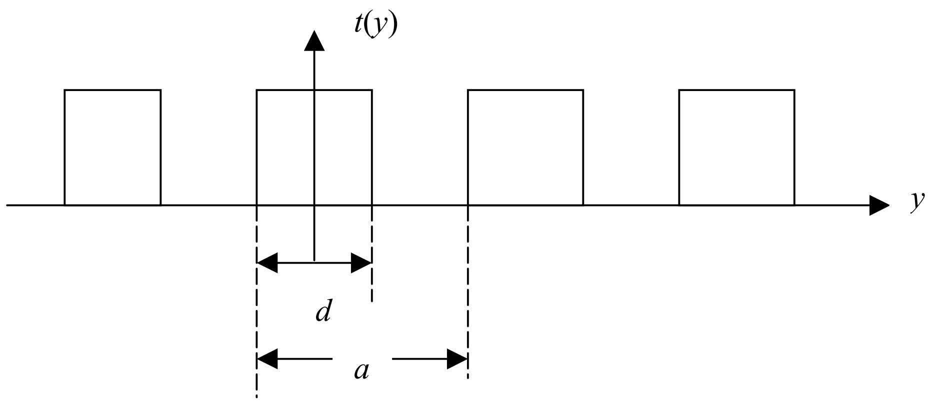
c) Bestem hvor mange interferensstriper som kan observeres innenfor den longitudinale koherenslengden.

d) Anta at frekvensen ω_0 svarer til bølgelengden $\lambda_0 = 500$ nm, og at vi kan observere 20 interferensstriper innenfor den longitudinale koherenslengden. Beregn ω_0, $\Delta\omega$ og l_c.

Oppgave 3

En plan bølge $U_0 = A_0 \exp(ikz)$ belyser et objekt i planet $z = 0$ med transmittansfunksjon som bare avhenger av y-koordinaten, dvs.: $t(x,y) = t(y)$. Feltet umiddelbart bak objektet er dermed: $U(x,y,0) = A_0 t(y)$. Det diffrakterte feltet bak objektet (for $z \ge 0$) kan uttrykkes som en superpososjon av plane bølger som forplantes med ulike vinkler med aksen (*vinkelspekteret*).

Anta at objektet er et firkantgitter med gitterkonstant (romlig periode) a, og at hver transparente åpning har bredde d ($d < a$, $t(y) = 1$ i de transparente områdene), som illustrert i figuren nedenfor.



a) Vis at fourierrekken for gittertransmittansen kan skrives som:

$$t(y) = \frac{d}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\pi md/a) \exp(2\pi imy/a),$$

hvor $\mathrm{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$.

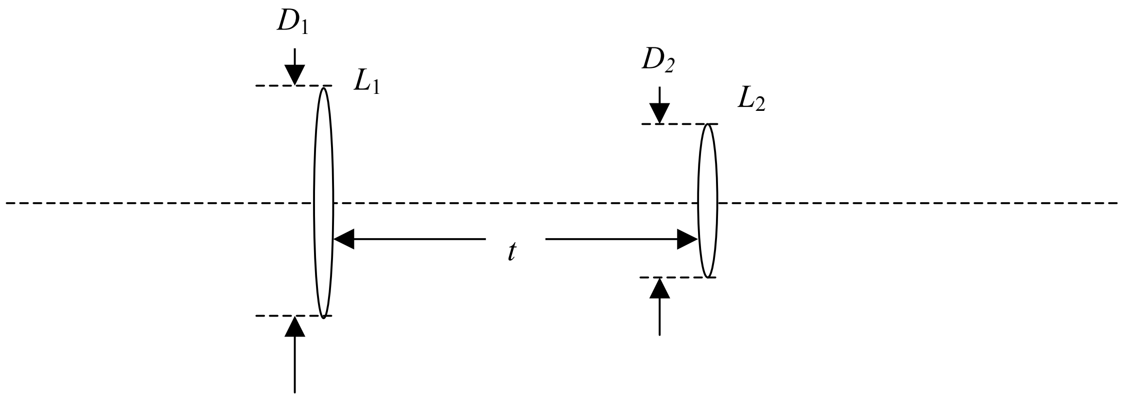
b) Vis at feltet bak objektet kan uttrykkes som en sum av plane bølger som forplantes i hver sin retning, en for hvert ledd i summen i a). Skriv ned uttrykk for den m-te diffrakterte planbølgen.

c) En planbølge $A \exp[ik(y \sin\theta + z \cos\theta)]$ forplantes under vinkelen θ med aksen. Bruk dette og resultatet fra b) til å vise at m-te planbølge oppfyller gitterligningen.

d) Forklar hvorfor bare et endelig antall av planbølgene i b) vil forplantes fritt. Enkelte kan også være fraværende fordi amplituden blir null.
Hvor mange fritt forplantede planbølger finnes bak gitteret? Anta at bølgelengden er 500 nm, at gitterkonstanten er $a = 10\mu$m og at $d = 5$ μm.

II. English text

Problem 1



The figure shows a composite system made up of two thin lenses in air ($n = 1$), L_1 and L_2, with focal lengths, respectively, $f_1 = 30$ cm and $f_2 = 5$ cm, that are separated by a distance $t = f_1 + f_2 = 35$ cm. The ray transfer is limited by the two lens holders with diameters, respectively, $D_1 = 8$ cm and $D_2 = 2$ cm.

a) Find the elements of the system matrix for the composite system expressed as functions of f_1 and f_2.
Find the elements of the transfer matrix between an object plane at a distance d in front of L_1 and an output plane at a distance d' behind L_2.
Assume that the two planes are conjugate planes (images of each other). Which condition must then be satisfied by the transfer matrix?

b) Use the results from a) to determine the image relation (d' as a function of d) and the magnification.
How do we define the principal planes (H and H') of a system? Does this system have principal planes and, in that case, where are they located? What kind of system is this?

c) Explain how we define the *aperture stop* and the corresponding *entrance-* and *exit pupils* for an imaging system.

What is meant by a *chief ray*, and how do we define the *field stop* and the corresponding *entrance* and *exit windows*?

Determine the aperture stop and the field stop when the system above is used to image objects at a large distance ($d \to \infty$) in front of L_1.

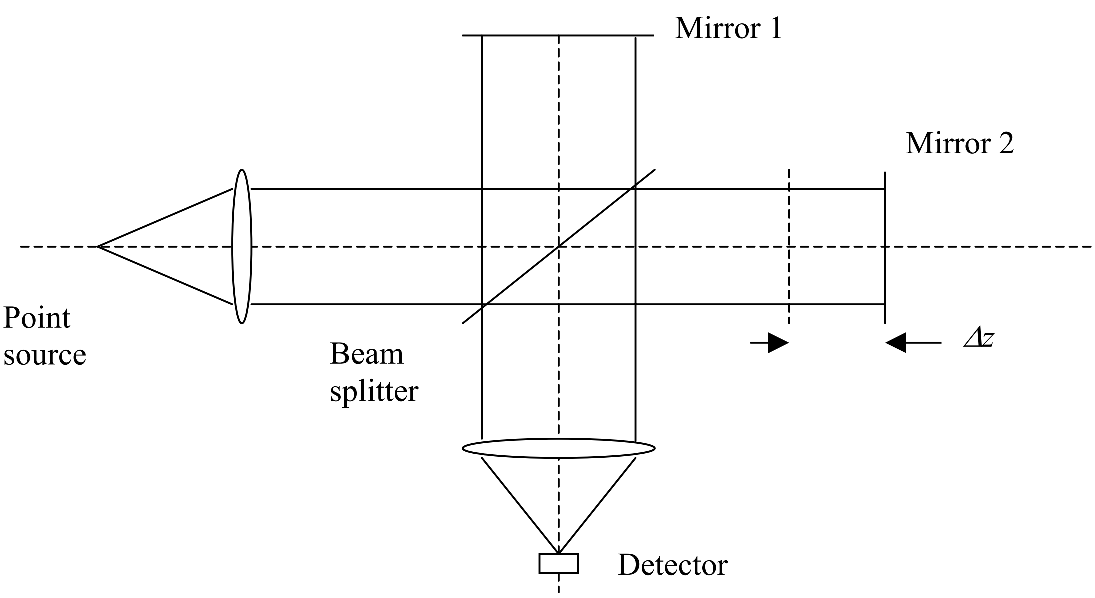
Where are the corresponding pupils and windows, and how large are they?

e) Assume that the system is used for visual observation of distant objects, and that the observers eye is located in the exit pupil of the system.

What is the distance from the exit pupil to the image plane (expressed in terms of the3 object distance d and the magnification β)?

How large is the visual magnification ? (Hint: Consider the angular extent of the image seen from the exit pupil, and the angular extent of the object seen from the entrance pupil.)

Problem 2



The figure illustrates a Michelson-interferometer with collimated point-source illumination. We assume that the two interfering waves have equal intensities, and that the interferometer is perfectly aligned. The detected intensity is a function of the path-length difference $s = 2\Delta z$, where Δz is the displacement of mirror 2 from the position with zero path-length difference.

In terms of the coherence function

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty W(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega,$$

where $\exp(x) \equiv e^x$ and $W(\omega)$ is the spectral density of the source, the interference signal can be written as

$$I(s) = 2[\Gamma(0) + \mathrm{Re}\,\Gamma(s/c)],$$

where $c \approx 3\cdot 10^8$ m/s is the velocity of light. Assume that the source spectrum is:

$$W(\omega) = \begin{cases} I_0\text{ , for } \omega_0 - \Delta\omega/2 \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega/2 \\ 0,\ \text{ otherwise} \end{cases},$$

where $\Delta\omega < \omega_0$.

a) Compute $\Gamma(\tau)$ and the resulting interference signal for the given source spectrum? Show that the interference term can be written as the product of $\cos(\omega_0 s/c)$ and an envelope function.

b) How do we define the *visibility* of an interference pattern?
Determine the visibility function $V(s)$ for the interference signal in a).
The first zero of the visibility function is often used as a measure ot the longitudinal coherence length (the length of the range in which the visibility is high).
Determine the longitudinal coherence length l_c in this case.

c) Determine the number of interference fringes that can be observed within the longitudinal coherence length.

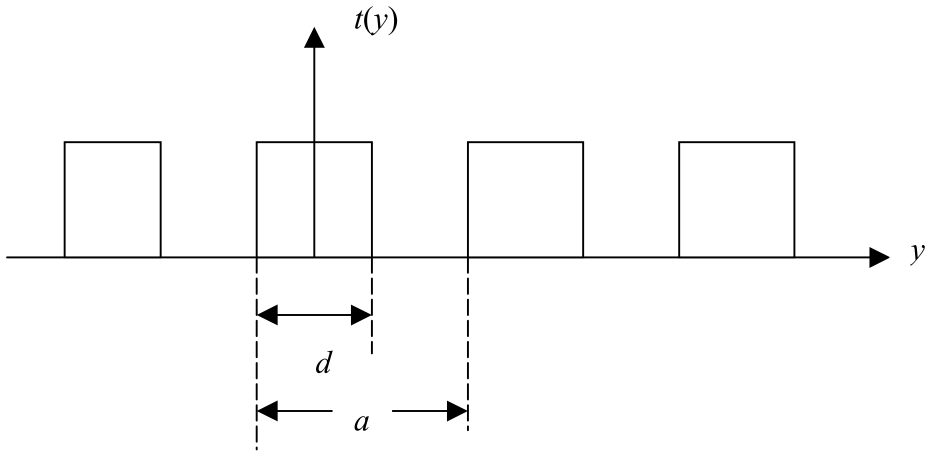
d) Assume that at the frequency ω_0 corresponds to the wavelength λ_0 = 500 nm, and that we can observe 20 interference fringes within the longitudinal coherence length.
Compute ω_0, $\Delta\omega$, and l_c.

.

Problem 3

A plane wave $U_0 = A_0 \exp(ikz)$ illuminates an object at $z = 0$ whose transmittance function depends only on the y-coordinate, i.e.: $t(x,y) = t(y)$. The field immediately behind the object is then: $U(x,y,0) = A_0 t(y)$. The diffracted field behind the object (for $z \geq 0$) can be expressed as a superposition of plane waves propagating at different angles with the axis (*the angular spectrum of plane waves*).

Assume that the object is a a square grating with grating constant (spatial period) a and a width d of each transparent slit ($d < a$, $t(y) = 1$ in the transparent regions), as illustrated in the figure:



a) Show that the Fourier series for the grating transmittance function can be written as:

$$t(y) = \frac{d}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\pi m d/a) \exp(2\pi i m y/a),$$

where $\operatorname{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$.

b) Show that the diffracted field behind the object can be expressed as a sum of plane-waves, one for each term in the sum in a), that are propagating in different directions. Write down the expression for the m-th diffracted plane-wave.

c) A plane wave $A \exp[ik(y \sin\theta + z\cos\theta)]$ is propagating at the angel θ with the axis. Use this and the result from b) to show that the m-th plane wave satisfies the grating equation.

d) Explain why only a finite number of the plane waves in b) will be freely propagated. Some of the plane waves may also be missing because they have zero amplitude.

How many freely propagated plane waves are found behind the grating? Assume that the wavelength is 500 nm, the grating period is $a = 10\mu$m, and $d = 5\ \mu$m.

III. Oppgitte formeler / Given formulas:

- Translasjonsmatrise /Translation matrix: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Refraksjonsmatrise /Refraction matrix: $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}$
- Avbildningsmatrise/ Imaging matrix: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -P & 1/\beta \end{pmatrix}$

  (P = brytningsstyrke / refractive power, β= forstørrelse/ magnification)
- For en enkel brytende flate / for a single refracting surface: $P = \dfrac{n'-n}{R}$.
- For en tynn linse / for a thin lens: $P = n/f$.
- ABCD-loven/The ABCD-law: $\dfrac{d'}{n'} = -\dfrac{A\dfrac{d}{n} + B}{C\dfrac{d}{n} + D}$.
- Hovedplanavstander / Distances to principal planes: $\left.\begin{array}{l} h = n(1-D)/C, \\ h' = n'(1-A)/C. \end{array}\right\}$
- Irradians / Irradiance: $E(\mathbf{r}) = \int L(\mathbf{r},\mathbf{s})\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}d\Omega$, ($\mathbf{n}$ = overflatenormal / surface normal)
- Planbølge /Plane wave: $A\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = A\exp[i(ux+vy+wz)]$;

$$w = +\sqrt{k^2 - u^2 - v^2}.$$

- Vinkelspekteret /The angular spectrum of plane waves:

$$U(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v,0)\exp[i(ux+vy+wz)]dudv$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v,0)\exp\left[i\left(ux+vy+z\sqrt{k^2-u^2-v^2}\right)\right]dudv.$$

$$A(u,v,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,y,0)\exp[-i(ux+vy)]dxdy.$$

- Fourier shift-theorem:

$$\mathsf{F}\{f(x-x_0)\} = \mathsf{F}\{f(x)\}\exp(-iux_0) = F(u)\exp(-iux_0)$$

$$\mathsf{F}^{-1}\{F(u-u_0)\} = \mathsf{F}^{-1}\{F(u)\}\exp(iu_0x) = f(x)\exp(iu_0x)$$

- Fourier series: $$\begin{cases} f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} F_0(m\frac{2\pi}{a}) \exp\left(im\frac{2\pi}{a}x \right), \\ F_0(u) = \mathsf{F}\{f_0(x)\} = \int_{-a/2}^{a/2} f(x)\exp(-iux)dx \end{cases}$$