NTNU
Det skapende universitet

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i TFY4195 Optikk

Faglig kontakt under eksamen:	**Dag Werner Breiby**
Tlf.:	**9845 4213**
Eksamensdato:	**8. august 2016**
Eksamenstid (fra-til):	**09:00 – 13:00**

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:

Kode C:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne.
K. Rottmann: Matematisk Formelsamling
S. Barnett & T.M. Cronin: Mathematical Formulae
O. Øgrim & B.E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Annen informasjon:

Eksamenssettet er utarbeidet av prof. Dag W. Breiby og gjennomlest av Eirik T. Skjønsfjell. Hvert delspørsmål a) b) etc. teller likt, med til sammen 100 % for de 10 delspørsmålene.

Målform/språk:	**Bokmål**
Antall sider:	**Totalt 5 sider**
Antall sider vedlegg:	**2 sider (formelsamling)**

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Gi kortfattet den tradisjonelle formuleringen av Fermats prinsipp. Hvordan kan Fermats prinsipp forstås med moderne fysiske begreper? Forklar hvordan fokuseringen til et paraboloid-formet speil kan forstås ved Fermats prinsipp!

b) Tegn en skisse som forklarer prinsippet for avbildning med linse, og bruk skissen til å utlede uttrykket for transversal forstørrelse $M_T = -\frac{s_i}{s_0}$.

Et kamera består av en enkelt tynn linse med fokallengde *f* = 50,0 mm. En 1,70 m lang kvinne står 10,0 m foran kameraet. Beregn den transversale forstørrelsen til bildet av kvinnen.

c) En svært tynn stråle med hvitt lys kommer inn mot en 10,0 cm tykk glassplate med en innfallsvinkel på 60,0°. Brytningsindeksen for rødt lys er 1,505 og for fiolett lys 1,545. Lag skisse. Beregn diameteren til den utgående (transmitterte) strålen.

d) En fisk som er under vann kikker rett opp gjennom den glatte (rolige) overflaten til et tjern, og i en sirkel av lys ser den skyer, fugler og et fly som tilfeldigvis passerer. Utenfor den lyse sirkelen er det mørkt. Forklar kort årsaken til dette, og beregn åpningsvinkelen til lyskjeglen når brytningsindeksen til vann er 1,33.

e) En plan elektromagnetisk bølge med en gitt polarisasjon kan skrives på formen

$$\mathbf{E}_1 = E_0\left(\hat{\mathbf{x}} - \frac{2\pi}{3}\mathrm{e}^{i(\pi/2)}\,\hat{\mathbf{y}}\right)\mathrm{e}^{ikz}\,\mathrm{e}^{-i\omega t},$$

der $\hat{\mathbf{x}}$ og $\hat{\mathbf{y}}$ er ortogonale enhetsvektorer. Skriv feltet $\mathbf{E}_1$ som en Jones vektor. Finn deretter en Jones vektor $\mathbf{E}_2$ som representerer en ortogonal polarisasjonstilstand til $\mathbf{E}_1$. Skisser begge tilstandene.

Oppgave 2

En koherent planbølge $A\exp(ikz)$ belyser et periodisk objekt ved $z = 0$ med transmittansfunksjon

$$t(x,y)=\frac{1+\cos(2\pi y/d)}{2}.$$

a) Bruk at $2\cos\alpha=\exp(i\alpha)+\exp(-i\alpha)$ og finn uttrykk for det diffrakterte feltet $U(x, y, z)$ for $z > 0$. Vis at dette feltet kan beskrives som 3 planbølger $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ i ulike retninger.
Hint 1: Finn først feltet ved $z = 0$. Utnytt deretter at $\mathbf{k} = \langle k_x, k_y, k_z \rangle$, hvor $k = 2\pi / \lambda$.
Hint 2: Én av disse 3 planbølgene kan skrives på formen

$$U_i=\frac{A}{4}\exp\left(\frac{2\pi iy}{d}+iz\sqrt{k^2-(2\pi/d)^2}\right).$$

b) Vis at i den paraksiale grensen ($d > \lambda$) kan det diffrakterte feltet skrives som

$$U(x,y,z)=\frac{A}{2}\exp(2\pi iz/\lambda)\left[1+\exp(-i\pi\lambda z/d^2)\cos(2\pi y/d)\right].$$

c) Det diffrakterte feltet avbildes ved hjelp av en linse med fokallengde $f = 10$ cm. Skisser intensitetsfordelingen i linsens bakre fokalplan. Finn posisjonene (som avstand i mm fra origo) til eventuelle diffraksjonstopper!
Anta at $d = 0{,}1$ mm og at bølgelengden er $\lambda = 500$ nm.

d) Finn forenklet uttrykk for $U(x, y, z)$ også i tilfellet $d < \lambda$. Kommenter svaret.

e) Hva skjer med intensitetsfordelingen i linsens bakre fokalplan hvis vi forskyver objektet sidelengs i sitt eget plan slik at objekttransmittansen blir $t'(x,y)=t(x,y-a)$?

Formelliste for emnet TFY4195 Optikk (VEDLEGG)

Vektorstørrelser er i **uthevet** skrift.

_____ Fysiske konstanter:

Ett mol: $M(^{12}C)$ = 12 g	1u = 1,6605 · 10^{-27} kg	N_A = 6,0221 · 10^{23} mol^{-1}
k_B = 1,3807 · 10^{-23} J/K	$R = N_A k_B$ = 8,3145 J mol^{-1} K^{-1}	0°C = 273,15 K
ε_0 = 8,8542 · 10^{-12} C^2/Nm^2	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2	
e = 1,6022·10^{-19} C	m_e = 9,1094 · 10^{-31} kg	
c = 2,998 · 10^8 m/s	h = 6,6261 · 10^{-34} Js	g = 9,81 m/s^2

_____ Elektrisitet og magnetisme:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{inni}}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \oint_S B_n dA = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S B_n dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0(I_{inni} + I_d),\ I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0 J + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{S} = c^2\varepsilon_0 \mathbf{E}\times\mathbf{B} \qquad I \equiv \langle S\rangle_T = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2 = \varepsilon_0 c\langle E^2\rangle_T$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

_____ Bølger, refraksjon og refleksjon:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (\nabla^2 + k^2)U = 0 \qquad I(r) = |U(r)|^2 \qquad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

$$U(\mathbf{r}) = \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \qquad U(r) = \frac{A}{r}\exp(ikr) \approx \frac{A}{z}\exp(ikz)\exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right]$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$r_s = r_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} \qquad r_p = r_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}$$

$$t_s = t_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} \qquad t_p = t_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}$$

_____ Jones og Stokes vektorer:____

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}E_x(t)\\E_y(t)\end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}2I_0\\2I_1-2I_0\\2I_2-2I_0\\2I_3-2I_0\end{bmatrix}$$

_____ Geometrisk optikk:____

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad \frac{1}{f}=\frac{n_{lens}-n_{medium}}{n_{medium}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}n\alpha\\y\end{bmatrix} \qquad R_1=\begin{pmatrix}1 & -P_1\\0 & 1\end{pmatrix},\ P_1=\frac{n_{t1}-n_{i1}}{R}\ \ T_{21}=\begin{pmatrix}1 & 0\\d_{21}/n_{t1} & 1\end{pmatrix}$$

_____ Diffraksjon:____

$$U(X,Y,z)=\frac{1}{i\lambda z}\mathrm{e}^{ikz}\mathrm{e}^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}\iint U(x,y,0)\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)-i(k_xx+k_yy)\right]dxdy$$

$$k_x=\frac{kX}{z},k_y=\frac{kY}{z},\ k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

_____ Fouriertransformasjon:____

$$F(k_x,k_y)=\iint f(x,y)\exp(i(k_xx+k_yy))dxdy$$

$$\mathcal{F}\{f(x-x_0)\}=\exp(ik_xx_0)\mathcal{F}\{f(x)\}$$

$$h(x)=f(x)\otimes g(x)\Rightarrow\mathcal{F}\{h(x)\}=\mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{g(x)\}$$

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{circ}\left(\frac{\rho}{a}\right)\right\}=\pi a^2\,2\frac{\mathrm{J}_1(\kappa a)}{\kappa a},\quad \kappa=\sqrt{k_x^2+k_y^2},\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{J}_1(3{,}83)=0.\ \ \rho_1=1{,}22\frac{R\lambda}{2a}$$

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{x}{w}\right)\right\}=w\frac{\sin(k_xw/2)}{k_xw/2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=1}^{N}\delta(x-na)\right\}=\mathrm{e}^{ik_xa(N+1)/2}\frac{\sin(k_xaN/2)}{\sin(k_xa/2)}$$