Løsningsforslag – Eksamen 1992:

## Oppgave 1

a) Matrisemultiplikasjon: $\begin{bmatrix} 1 & d'/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$

gir:

$$A' = A + Cd'/n, \quad B' = Ad/n + Dd'/n + B + Cdd'/n^2$$

$$C' = C \text{ og } D' = D + Cd/n.$$

b) Ved avbildning er $B' = 0$, og da er $A' = \beta$ forstørrelsen og $D' = 1/\beta$. Avbildningsmatrisen blir:

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ -n/f & 1/\beta \end{bmatrix}$$

c) Hovedplanene $H$ og $H'$ er definert ved at vi har avbildning mellom dem med forstørrelse $\beta = 1$. For $d = h$ og $d' = h'$ har vi da at $A' = D' = 1$, som gir de to oppgitte formlene.

d) Avbildningsmatrise mellom hovedplan: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f & 1 \end{bmatrix}$. Når avstandene refereres til hovedplanene oppfyller $s$ og $s'$ linseformelen: $1/s + 1/s' = 1/f$.

e) Apertureblenden er den fysiske blenden som avgrenser strålebunten ved avbildning av et punkt på aksen. Feltblenden er den fysiske blenden som avgrenser det knippet av hovedstråler (gjennom sentrum av apertureblenden) vi kan trekke mellom objektpunkter o tilhørende billedpunkt. Inngangspupillen er apertureblenden avbildet til objektrommet. Utgangspupillern er apertureblenden avbildet til billedrommet. Inngangsvinduet er feltblenden avbildet til objektrommet. Utgangsvinduet er feltblenden avbildet til billedrommet.

**Oppgave 2:** For $n = 1$:

a) $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t/f_1 & t \\ -[1/f_1+1/f_2-t/(f_1f_2)] & 1-t/f_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 10\text{ cm} \\ -0.1\text{ cm}^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $h = (1-D)/C = -10$ cm ($H$ ligger 10 cm bak $L_1$, dvs i $L_2$)
$h' = (1-A)/C = -0.5/0.1$ cm $= -5$ cm ($H'$ ligger 5 cm foran $L_2$, dvs. midt mellom linsene).
$f = -1/C = 10$ cm.
Objektavstand $s = 90$ cm $- h = 100$ cm. $1/s+1/s' = 1/f$ gir $s' = 11.111$ cm.
Dvs. bildet ligger 11.111cm $+ h' = 6.111$ cm etter $L_2$.
Forstørrelsen er $\beta = -s'/s = 0.11111 = -1/9$.

c) Vi avbilder alle aperturer til billedsiden: $L_2$ ligger i billedrommet og randstrålen til et billedpunkt på aksen har vinkel 1.5 cm/6.1111 cm = med aksen. $L_1$ avbildes til $\infty$. Randstrålen har vinkel 1/10 med aksen. [Kan bruke matrisemetoden her, men det er enklest å se på stråler gjennom sentrum av $L_2$ som kommer ut med samme retning. Siden bildet ligger i $\infty$ utgjør det samme vinkel sett fra billedpunktet og sentrum av $L_2$.]

Det følger at innfatinigen til $L_1$ er apertureblende og inngangspupille, og at utgangspupille ligger i $\infty$. Da er innfatningen til $L_2$ feltblende, og utgangsvindu. Hovedstrålene (gjennom sentrum av apertureblenden) går parallelle med aksen i billedrommet, så billedfeltets diameter er $D_2 = 3$ cm. Den tilsvarende feltdiameter i objektplanet er da $D_2/|\beta| = 3$ cm$/(1/9) = 27$ cm.

d) Systemet har 4 brytende flater, så samlet transmisjonskoeffisient er $\mathcal{T} = (0.99)^4 = 0.961$. Uten tap er irradiansen på aksen: $E_0 = L\,\Delta\Omega' = L\,\pi(1/10)^2 = 0.628$ W/m². Med tap er den $E = E_0\mathcal{T} = 0.604$ W/m². Over billedfeltet varierer irradiansen som $\cos^4\theta$ hvor $\theta$ er vinkelen mellom hovedstrålen og aksen. Men i dette tilfellet er utgangspupillen i $\infty$ slik at $\theta = 0$ for alle billedpunktene, og da varierer ikke irradiansen over biledfeltet.

e) $F' = 1/(2v_m') = 1/(2/10) = 5$. Oppløsningsgrensen er $\Delta y' = 1.22\,\lambda\,F' = 3.05\cdot 10^{-6}\mathrm{m} = 3.05\ \mu\mathrm{m}$. Antall punkter som kan oppløses: $N = \pi(D_2/2)^2/\pi\Delta y'^2 = (D_2/(2\Delta y'))^2 = (3\cdot 10^{-2}/6.1\cdot 10^{-6})^2 = 2.419\cdot 10^7$.

**Oppgave 3**

a) Felt ved $z = 0$:

$$U(x,y,0) = At(x,y) = A[1+\cos(2\pi y/d)]/2 = A/2 + (A/4)e^{i2\pi y/d} + (A/4)e^{-i2\pi y/d}. \qquad (1)$$

Planbølge $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ varierer som $e^{i(k_x x + k_y y)}$ ved $z = 0$. (1) inneholder tre ledd av denne formen. Første ledd, konstanten $A/2$, svarer til at $k_x = k_y = 0$ og $k_z = k$ slik at den tilsvarende planbølgen blir en dempet versjon av belysningsbølgen: $U_1 = (A/2)e^{ikz}$.
Annet ledd i (1): $(A/4)e^{i2\pi y/d}$ svarer til $k_x = 0$, $k_y = 2\pi/d$ og $k_z = \sqrt{k^2-(2\pi/d)^2}$, og planbølgen blir $U_2 = (A/4)e^{i(2\pi y/d + k_z z)}$.
Tredje ledd i (1): $(A/4)e^{-i2\pi y/d}$ svarer til $k_x = 0$, $k_y = -2\pi/d$ og $k_z = \sqrt{k^2-(2\pi/d)^2}$, og planbølgen blir $U_3 = (A/4)e^{i(-2\pi y/d + k_z z)}$. Det diffrakterte feltet blir summen av disse tre planbølgene som går i ulik retning, dvs.

$$U(x,y,z) = U_1 + U_2 + U_3$$

$$= (A/2)e^{ikz} + (A/4)e^{i(2\pi y/d + \sqrt{k^2-(2\pi/d)^2}\,z)} + (A/4)e^{i(-2\pi y/d + \sqrt{k^2-(2\pi/d)^2}\,z)}$$

b) I paraksialtilnærmelsen har vi at $\sqrt{k^2-(2\pi/d)^2} \approx k - (2\pi/d)^2/(2k) = 2\pi/\lambda - \pi\lambda/d^2$. Innsatt i uttrykket for det diffrakterte feltet fås den oppgitte formelen.

$e^{-i\pi\lambda z/d^2} = 1$ for $\pi\lambda z/d^2 = 2\pi\cdot m$ hvor $m$ er et heltall. Da ser vi direkte at det diffrakterte feltet er $Ae^{ikz}t(x,y)$, dvs. det samme som om objektet hadde stått der og blitt belyst av bølgen $Ae^{ikz}$. Dette skjer for $z = z_m = 2md^2/\lambda = mz_1$ hvor $m$ er et heltall og $z_1 = 2d^2/\lambda = 4$ cm. For hver fjerde cm får vi altså avbildet objektet i det diffrakterte feltet.

c) Hver av de tre planbølgene fokuseres av linsen og avbildes til punkter (diffraksjonstopper) i linsens bakre fokalplan.