

## EKSAMEN I FAG 74181 OPTIKK (Onsdag 16. august 1995)

## Oppgave 1, løsningsforslag

a)

Vi finner totalavstanden ved hjelp av følgende to ligninger:

Forstørrelse:  $\beta = \frac{-s'}{s}$

Avbildning:  $s' = \frac{sf}{s-f}$

Ved bruk av disse ligningene, og uttrykt ved forstørrelsen, får vi:

$$s_{\text{tot}} = s + s' = -f \frac{(\beta - 1)^2}{\beta}$$

Innsatt tallverdier:

$$s_{\text{tot}} = +30 \frac{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}{\frac{1}{3}} = +40.$$

b)

Vi beregner først matriseovergangen fra første til siste verteks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{d}{f_1}) = A & d = B \\ (-\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2}) = C & (1 - \frac{d}{f_2}) = D \end{pmatrix}$$

Formlene for posisjonene til hovedplanene og fokallengden er oppgitte.

Posisjonen til første hovedplan:

$$s = \frac{1-D}{C} = \frac{1 - (1 - \frac{d}{f_2})}{(-\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2})} = \frac{f_2 d}{-f_2 - f_1 + d} = \frac{-30 \cdot 30}{-25 + 30 + 30} = -25,71$$

Posisjonen til andre hovedplan:

$$h' = \frac{1-A}{C} = \frac{1 - (1 - \frac{d}{f_1})}{(-\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2})} = \frac{f_2 d}{-f_2 - f_1 + d} = \frac{-25 \cdot 30}{-25 + 30 + 30} = -21,43$$

Fokallengden:

$$f = -\frac{1}{C} = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2}\right)} = \frac{f_2 f_1}{+f_2 + f_1 - d} = \frac{-25 \cdot 30}{25 - 30 - 30} = 21,43$$

c)

Vi sammenligner linseåpningene sett fra sentrum av objektet, og avbilder linseåpningene til objektrommet (mot venstre).

Linseåpningen til den første linse ligger i objektrommet slik at den paraksiale vinkelåpningen, sett fra sentrum av objektet, blir lik:

$$\frac{D_1}{d_0}$$

Vi avbilder den andre linseåpningen mot venstre ved hjelp av den første linse:  $s' = \dots$

$$s' = \frac{f_1}{s - f_1} = \frac{30 \cdot (-30)}{30 - (-30)} = -15$$

Den tilhørende forstørrelse:

$$\beta_p = -\frac{s'}{s} = \frac{f_1}{s - f_1} = 0,5$$

Vinkelåpningen til den andre linseåpningen, sett fra sentrum av objektet, blir da:

$$\frac{D_2 \beta_p}{d_0 - s'}$$

Den andre linseåpningen er apertureblender når:

$$\left| \frac{D_2 \beta_p}{d_0 - s'} \right| < \left| \frac{D_1}{d_0} \right| \text{ som gir betingelsen: } d_0 < -\frac{D_1 s'}{D_2 \beta_p - D_1} = -\frac{3 \cdot (-15)}{7,5 \cdot 0,5 - 3} = 60.$$

d)

Vi kan i rekkefølge sette opp følgende sammenhenger:

Irradiansen mot objektet:	$E$	
Eksitansen fra objektet:	$ER$	
Radiansen fra objektet:	$\frac{ER}{\pi}$	( $\pi$ kommer fra integralet av $\cos(\theta)$ over halvrommet)
Radiansen mot bildet:	$\frac{ER}{\pi}$	(Ingen refleksjonstap, da endres ikke radiansen gjennom linsesystemet)
Irradiansen mot bildet:	$E' = \frac{ER}{\pi} \Omega' = \frac{ER}{\pi} \frac{\Omega}{\beta_{tot}^2}$	

$\Omega$  er den romvinkelen som inngangspupillen utspenner, sett fra objektet, og  $\Omega'$  er den romvinkelen som utgangspupillen utspenner, sett fra bildet.  $\beta_{tot}$  er den totale forstørrelsen fra objekt til bilde. For beregning av inngangspupillen må vi beregne den for to tilfeller:

Når  $d_0 > 60$  begrenser linseåpningen til linse 1. I det tilfellet finner vi følgende paraksiale romvinkel for inngangspupillen:

$$\Omega = \frac{\pi D_1^2}{4d_0^2}$$

Når  $d_0 < 60$  begrenser linseåpningen til linse 2. Vi har tidligere funnet posisjonen til denne inngangspupille til å være lik  $s'$ , der positiv  $s'$  ligger til venstre for den første linsen.

Vi finner da følgende paraksiale romvinkel for inngangspupillen:

$$\Omega = \frac{\pi D_2^2 \beta_p^2}{4(d_0 - s')^2}$$

Her er som før:

$$s' = \frac{f_1}{s - f_1}, \text{ der } s \text{ er avstanden mellom linsene, og } \beta_p \text{ forstørrelsen fra linse 2 sin}$$

linseinnfatningen til inngangspupillen.

For å finne  $\beta_m$  regner vi objekt- og billed-avstander fram til hovedplanene. Vi bruker sammenhengen:

$$\beta_m = -\frac{s'_m}{s_m} = -\frac{s_m f}{(s_m - f)s_m} = \frac{f}{f - s_m}$$

Her er:  $s_m = (d_0 - h)$ , som gir:

$$\beta_m = \frac{f}{f - d_0 + h}$$

For  $d_0 > 60$  får vi da til slutt ved innsetning:

$$E' = \frac{ER D_1^2 (f - d_0 + h)^2}{4d_0^2 f^2}$$

For  $d_0 < 60$  får vi:

$$E' = \frac{ER (f - d_0 + h)^2 f_1^2 D_2^2}{4f^2 (d_0 s - d_0 f_1 - s f_1)^2}$$

I disse to sluttresultatene har vi tidligere regnet ut  $f$  og  $h$ .

e)

Vi ser at for store avstander  $d_0$  blir strålingsirradiansen inn mot bildet konstant lik:

$$E' \rightarrow \frac{ER D_1^2}{4f^2}$$

For et objekt med begrenset utstrekning vil, når  $d_0$  øker, det geometriske bildet snart bli mindre enn punktdiffraksjonsbildet. Når det skjer vil størrelsen til det resulterende bildet forbli tilnærmet konstant idet  $d_0$  øker videre. Det vil si at størrelsen til bildet holdes konstant mens energien i bildet avtar med  $d_0^2$ , og vi får en reduksjon av irradiansen på akse utover det som er gitt av uttrykket ovenfor.

Denne reduksjonen inntreffer idet punktdiffraksjonsbildet er tilnærmet like stort som det geometriske bildet. Referert til objektiden har vi at diameteren til punktdiffraksjonsbildet da er lik:

$$2\lambda \frac{d_0}{D_1}$$

Dette gir betingelsen:

$$D_0 = 2\lambda \frac{d_0}{D_1}$$

⇓

$$d_0 = \frac{D_0 D_1}{2\lambda}$$

Innsatt tallverdier:

$$d_0 = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 0,55 \cdot 10^{-3}} = 16363 \text{ mm, det vil si } = 16,4 \text{ m.}$$

## Oppgave 2, løsningsforslag

a)

En planbølgekomponent kan skrives som:

$$A_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

Hvor fasehastigheten er lik:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Bølgetallsvektoren  $\vec{k}$  har komponentene:

$$(k_x, k_y, k_z)$$

De tilhørende vinkelkomponentene ( $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ ) til bølgefrotnormalen (strålen) er gitt av retningskosinene:

$$(\cos(\phi_x), \cos(\phi_y), \cos(\phi_z))$$

Romfrekvenskomponentene i objektet er lik:

$$(v_x = \frac{1}{L_x}, v_y = \frac{1}{L_y}, v_z = \frac{1}{L_z})$$

Felt- og objekt-komponentene er knyttet sammen med følgende ligninger:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\phi_x), \quad \cos(\phi_x) = \frac{\lambda}{L_x} = \lambda v_x,$$

$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\phi_y), \quad \cos(\phi_y) = \frac{\lambda}{L_y} = \lambda v_y,$$

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\phi_z), \quad \cos(\phi_z) = \frac{\lambda}{L_z} = \lambda v_z.$$

Her er:

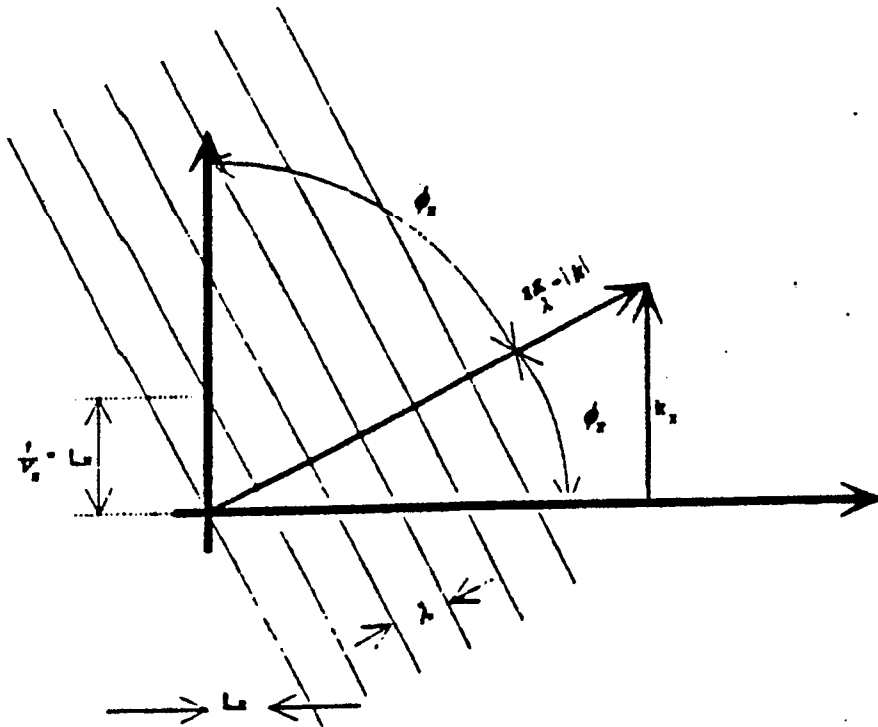
$k_x$  en bølgetallskomponent,  $\lambda$  er bølglengden, og  $\cos(\phi_x)$  en retningskosin.

Vinkelen  $\varphi_x$  mellom x-aksen og bølgefrontnormalen finnes ved å ta  $\cos^{-1}()$  av retningskosinen. y- og z-komponentene finnes på samme vis. x-, y-, og z-komponentene knyttes sammen ved hjelp av ligningene:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2.$$

$$\cos^2(\varphi_x) + \cos^2(\varphi_y) + \cos^2(\varphi_z) = 1.$$

Sammenhengen mellom de forskjellige komponentene er vist i skissen nedenfor:



b)

Interferenssignalet er gitt av interferensen mellom følgende to bidrag:

Den komplekse feltamplityden (planbølgen) fra speil 2:

$$A_1 = \frac{A}{4} e^{i(2d_1 - t)}$$

Den komplekse feltamplityden (planbølgen) fra speil 1:

$$A_2 = \frac{A}{4} e^{i t d_1} e^{i(t, x - t, z)} = \frac{A}{4} e^{i t d_1} e^{i(t \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)x - t \cos(2\theta)(d_1 - d_2))}$$

Intensiteten på detektoren er da lik:

$$I = |A_1 + A_2|^2 \\ = \frac{A^2}{16} \left| e^{i(2d_1 - t)} + e^{i t d_1} e^{i(t \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)x - t \cos(2\theta)(d_1 - d_2))} \right|^2$$

Vi samler de  $x$ -uavhengige fasebidragene i parameteren:

$$\varphi = k(2d_1 + d_2) - kd_1 - k \cos(2\theta)(d_1 + d_2),$$

hvor spill 2 forflytter seg med hastigheten  $v$  slik at:

$$d_2 = vt$$

Innsatt gir dette følgende uttrykk for intensiteten:

$$I = \frac{2A^2}{16} \left( 1 + \cos \left[ k \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2\theta \right) x - \varphi \right] \right).$$

Når detektoren integrerer over en periode, eller et multiplum  $N$  av en periode, vil interferenssignalet forsvinne, det vil si når:

$$b = N \frac{2\pi}{k \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2\theta_N \right)} = \frac{N\lambda}{\sin(2\theta_N)}.$$

Vi løser denne ligningen med hensyn på  $\theta_N$ , som gir resultatet:

$$\theta_N = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{N\lambda}{b} \right), \text{ hvor: } N = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots, \theta_N(\text{maks}) = \pi/4.$$

c)

Vi fant at intensiteten i detektorplanet er lik:

$$I = \frac{2A^2}{16} \left( 1 + \cos \left[ k \sin(2\theta)x - \varphi \right] \right),$$

der  $\varphi$  øker lineært med tiden via  $d_2 = vt$ .

Detektoren integrerer bidraget over den fotofølsomme flaten, som gir:

$$\begin{aligned} & \frac{2A^2}{16} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( 1 + \cos \left[ k \sin(2\theta)x - \varphi \right] \right) dx dy \\ &= \frac{2A^2 b^2}{16} \left[ 1 + \frac{\sin \left\{ \frac{kb}{2} \sin(2\theta) \right\}}{\left\{ \frac{kb}{2} \sin(2\theta) \right\}} \cos(\varphi) \right] \end{aligned}$$

Vi ser direkte at når  $\varphi$  øker vil modulasjonsgraden/visibiliteten være lik:

$$\frac{\sin \left\{ \frac{kb}{2} \sin(2\theta) \right\}}{\left\{ \frac{kb}{2} \sin(2\theta) \right\}}$$

d)

Amplitydefordelinga til den fokuserte beigen finnes vha. den oppgitte Fresnels diffraksjonsformel, der  $z = d = d_0 + 2d_1 + d_2$ :

$$U(x, y, d) = \frac{A_0}{i\lambda d} e^{i\left[d - \frac{1}{2d}(x^2 + y^2)\right]} \iint_{-B}^{+B} \text{rect}\left(\frac{x'}{B}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{B}\right) e^{-i\frac{1}{2d}(x'^2 + y'^2)} dx' dy'$$

Romfrekvensspekteret finner vi ved å Fouriertransformere denne fordelinga:

$$F_U(k_x, k_y) = \iint_{-B}^{+B} U(x, y, d) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

På grunn av det kvadratiske fasebidraget foran integralet, i uttrykket til  $U(x, y, d)$ , er det ikke mulig å finne en eksplisitt løsning på dette siste integralet. Men det er mulig å finne en god tilnærming som gjelder i de fleste praktiske situasjoner. Integralet, i uttrykket til  $U(x, y, d)$ , gir bare bidrag i et lite område rundt fokus innenfor en radiusavstand på  $\lambda F = \lambda d/B$ . Setter vi inn for denne radiusavstanden i uttrykket for den kvadratiske fasefaktoren får vi:

$$\frac{2\pi(x^2 + y^2)}{\lambda d} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda d}{B}\right)^2 = \pi \left(\frac{2\lambda F'}{B}\right)^2$$

Den siste parentesen i dette uttrykket viser at så lenge det resulterende feltet er vesentlig ulik 0, og dersom blender-åpningen er mye større enn fokusbredden, vil den kvadratiske fasefaktoren være tilnærmet lik 0. Dette gjelder i de aller fleste praktiske situasjoner. Det tilhørende eksponential-leddet blir dermed tilnærmet lik 1. Innsatt for  $U(x, y, d)$  gir romfrekvensspekteret til amplitudedefordelinga følgende integral:

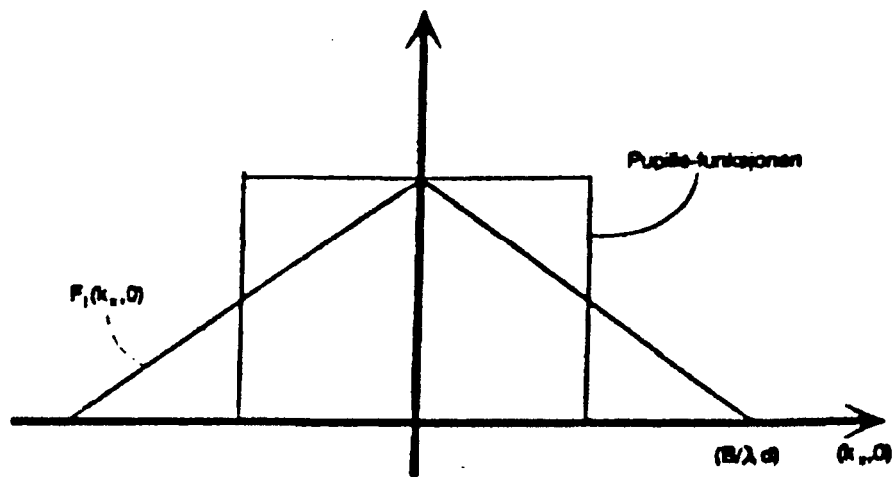
$$\begin{aligned} F_U(k_x, k_y) &= \frac{A}{i4\lambda d} \iint_{-B}^{+B} \text{rect}\left(\frac{x'}{B}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{B}\right) \iint_{-B}^{+B} e^{-i\left[\left(\frac{B}{d} - k_x\right)x' + \left(\frac{B}{d} - k_y\right)y'\right]} dx' dy' dx' dy' \\ &= \frac{A(2\pi)^2}{i4\lambda d} \iint_{-B}^{+B} \text{rect}\left(\frac{x'}{B}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{B}\right) \delta\left(\frac{kx'}{d} + k_x\right) \delta\left(\frac{ky'}{d} + k_y\right) dx' dy' \\ &= \frac{A(2\pi)^2}{i4\lambda d} \text{rect}\left(-\frac{dk_x}{Bk}\right) \text{rect}\left(-\frac{dk_y}{Bk}\right). \end{aligned}$$

Dette resultatet viser at romfrekvensspekteret til amplitudedefordelingen er direkte gitt av pupille-funksjonen.

Vi skal nå se på romfrekvensspekteret til intensitetsfordelingen som er gitt av integralet:

$$F_I(k_x, k_y) = \iint_{-B}^{+B} |U(x, y, d)|^2 e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Dette er den inkoherente optiske transferfunksjonen OTF. Det resultatet kjenner vi fra pensum. Vi ser også at  $|U(x, y, d)|$  er gitt av den Fouriertransformerte av pupillefunksjonen. I forelesningene/pensum har vi sett at den Fouriertransformerte av modulus kvadrat av en funksjon gir autokorrelasjonen til den Fouriertransformerte av denne funksjonen (dette kan også vises ved hjelp av det oppgitte foldningsintegralet). Romfrekvensspekteret til intensitetsfordelingen vil dermed være gitt av autokorrelasjonen til pupillefunksjonen. Dette er vist i skissen nedenfor:



e)

Se i pensum om utledningen av tidskoherensgraden.

f)

Se pensum om beskrivelsen av Fourier Transform Spektroskopi.