LF, eksamen TFY 4195 Optikk Mai 2016

1a) Trad: Lyset velger den veien fra A til B som tar kortest tid.

Kortest tid er ekvivalent med korteste optiske veilengde.

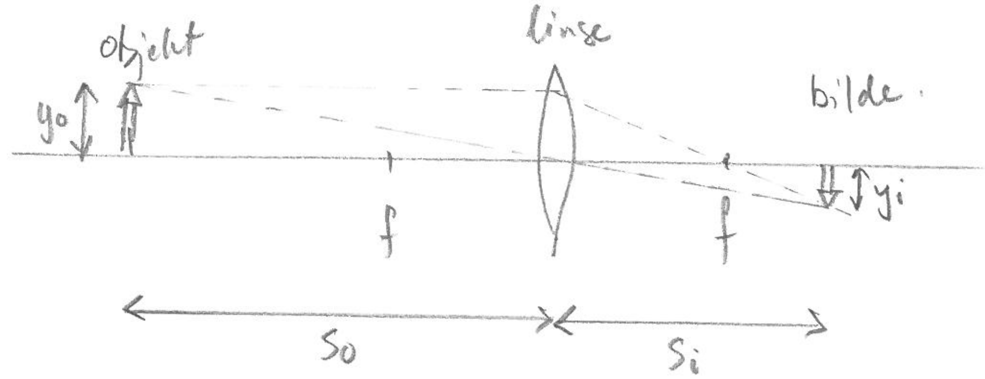
Moderne: En lysstråle fra S til P følger en bane som er <u>stasjonær</u> mht. små endringer, dvs. veilengden endres ikke ved små perturbasjoner.

For ikke-stasjonære baner vil faseforskjeller mellom fotoner som velger litt forskjellige baner gi destruktiv interferens.

At man kan se samme objekt i ulike retninger, f.eks. sola ved speiling i vann:

bryter ikke med Fermats prinsipp så lenge begge banene er stasjonære (enten minimum eller maksimum, $\delta L = 0$).

1b)



Oppgitt: $s_0 = 10.0$ m $\quad y_0 = 1.70$ m

$f = 50.0$ mm

Gauss' linseformel $\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow s_i = \frac{s_0 f}{s_0 - f}$

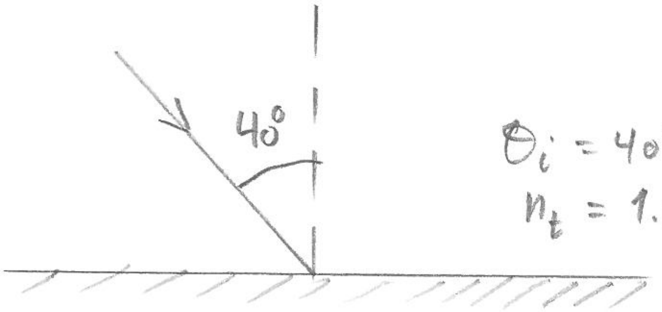
Transversal forstørrelse $M_T = \frac{y_i}{y_0} = -\frac{s_i}{s_0}$

$$y_i = -y_0 \frac{s_i}{s_0} = \underline{\underline{-y_0 \frac{f}{s_0 - f}}}$$

Tallsvar: $\underline{\underline{-8.5 \text{ mm}}}$

(fortegn: bildet er invertert)

1c)



$\theta_i = 40°$
$n_t = 1.55, \; n_i = 1.00$

"Naturlig" lys er upolarisert, dvs
like mengder s- og p-polarisasjon.

$$r_p = \frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i}$$

$$r_s = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$

Vi trenger θ_t. Snells lov $n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$

$$\Rightarrow \theta_t = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_i}{n_t}\right)$$

$$= \underline{24.5°}$$

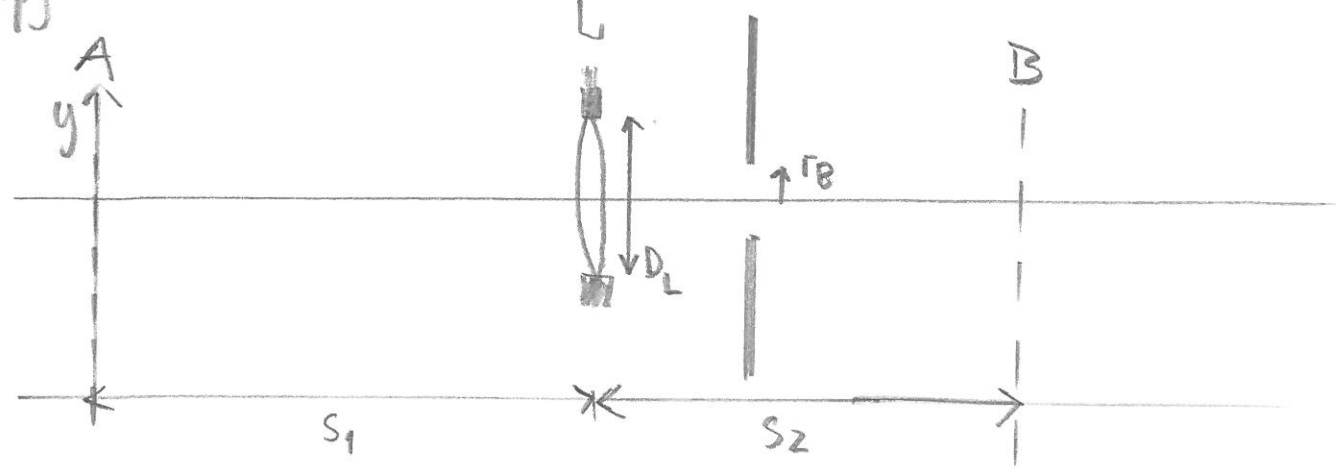
Ved innsetting fås $r_p = 0.132$
$r_s = -0.296$

Reflektansen er dermed $\frac{1}{2}(r_p^2 + r_s^2) = 0.053$

$$= \underline{\underline{5.3\%}}$$

Oppg 2

a)



a) $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ beskriver hvordan strålen $\begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix}$

går fra A til B, α er vinkel, y er posisjon.

M er et produkt av en translasjon fra A til L, etterfulgt av brytning i L, og transmisjon fra L til B:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{bmatrix}$$

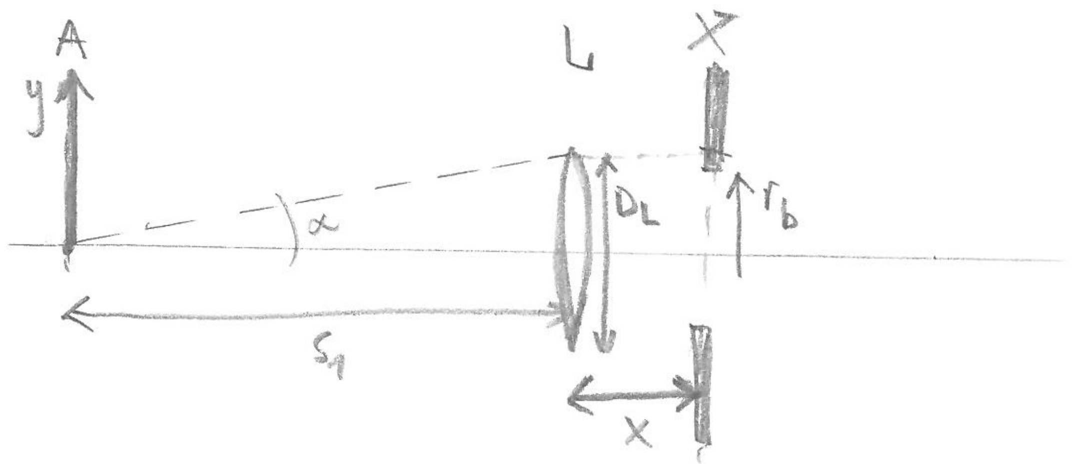
$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ s_2 & -\frac{s_2}{f} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{s_1}{f} & -\frac{1}{f} \\ s_1 + s_2 - \frac{s_1 s_2}{f} & 1 - \frac{s_2}{f} \end{bmatrix}$$

Vi ser at A er gitt ved $A = 1 - \frac{s_1}{f}$

Denne formalismen forutsetter:
- geometrisk optikk (lys går i rette linjer)
- paraksial (stråler har liten vinkel med optiske akse).

2b)



Vi ser at vi kan bruke matrisen fra a) for å finne den marginale strålens posisjon ved planet X; y_X, ved å la $s_2 = x$.

Ved planet A har strålen posisjon $y_A = 0$

og vinkel $\alpha = \arctan\left(\frac{D_L/2}{s_1}\right) = \frac{D_L}{2s_1}$ (parax.)

Dermed

$$\begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix}_X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{s_2 = x} \begin{bmatrix} D_L/2s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $y_X = C \cdot \frac{D_L}{2s_1} \cancel{+ D \cdot 0}$

$$= \left(s_1 + x - \frac{s_1 x}{f}\right) \frac{D_L}{2s_1}$$

$$= \frac{1}{2} D_L x \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{f}\right)$$

For at blenderen skal være aperturestopp (AS), må det være blenderen som begrenser strålen,

dvs. $r_B < y_X$.

2b forts.

Ettersom det ikke er noen optiske element "nedstrøms" for blenderen, må blenderen selv være utgangspupille når blenderen er AS.

Altså: utgangspupillen er i planet $\bar{X}$.

Inngangspupillen finnes ved å avbilde AS gjennom linsen. Vi bruker Gauss' linseformel:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow s_i = \frac{xf}{x-f}.$$

Det er oppgitt at $f > 0$ og at $0 < x \leq f \Rightarrow s_i < 0$.

Det er derfor klart at inngangspupillen ligger en avstand s_i til høyre (nedstrøms) for L.

(og også til høyre for $\bar{X}$).

2c) Hvis $D = 0$ må vi ha at $1 - \frac{x}{f} = 0$,

dvs. $x = f$ slik at blenderen er plassert i fokalplanet til linsa.

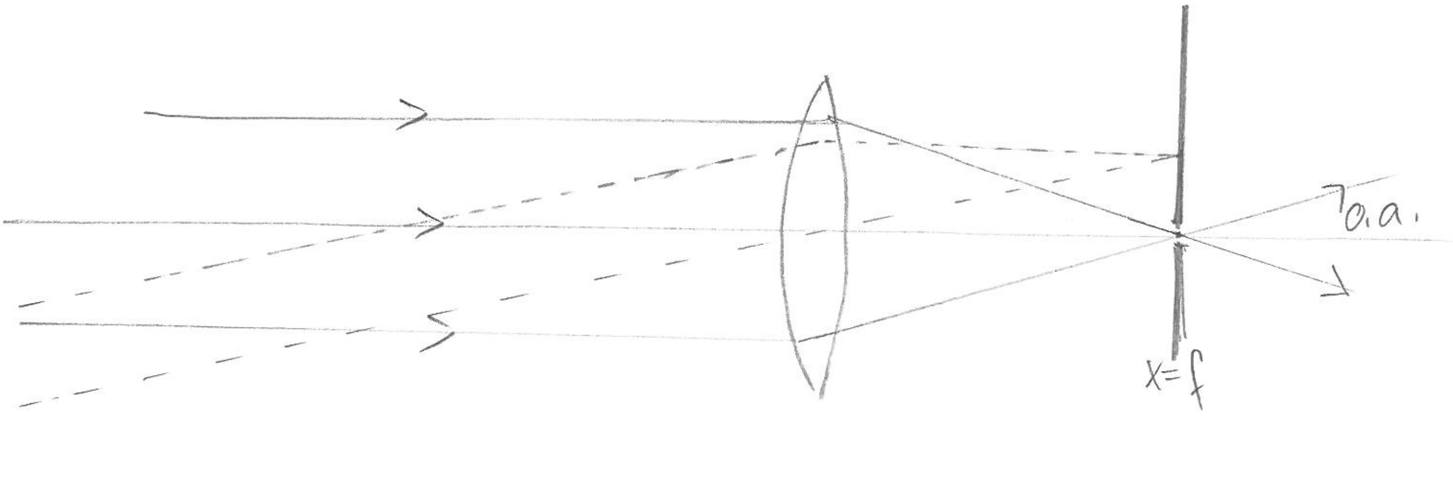
Dette innebærer at blenderen (gitt $r_b < y_x$) vil være AS, og inngangspupillen vil være i $-\infty$.

I praksis innebærer dette at kun stråler som er parallelle med den optiske aksen slipper gjennom systemet.

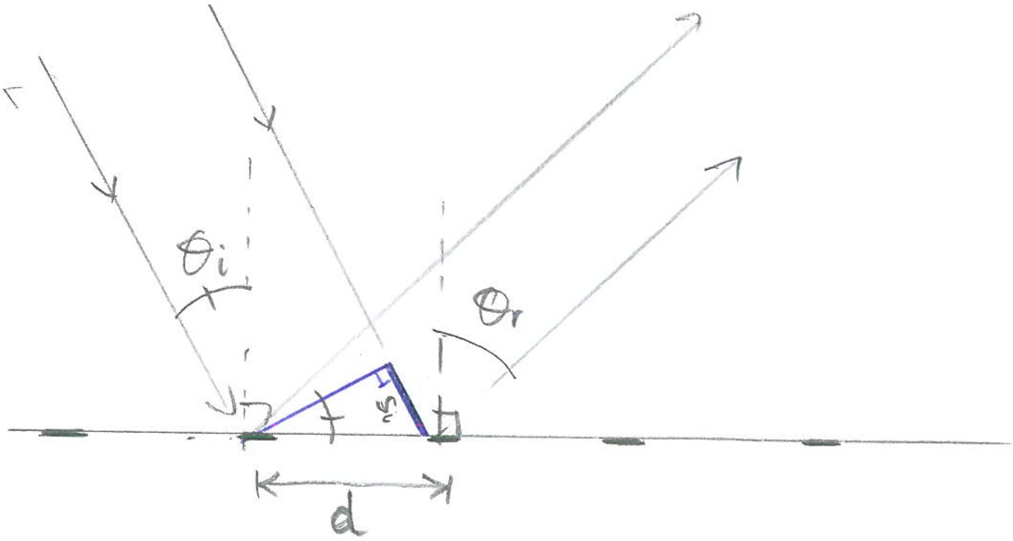
⇒ Systemet er "telesentrisk på objektsiden".*

Telesentriske system brukes bl.a. i maskin-syn for roboter fordi bildet ikke har <u>perspektiv</u> da alle stråler er parallelle: Alle gjenstander avbildes derfor med sin riktige størrelse, uavhengig av om de er nær eller langt unna observatøren.

* gitt at blenderens radius er tilstrekkelig liten til at innkommende stråler må være parallelle med den optiske aksen:



Oppg 3a



Vi ser av figuren at for innkommende nabostråler er gangveisforskjellen $d \sin\theta_i$, og for utgående stråler $d \sin\theta_r$.

Den totale gangveisforskjellen må tilsvare et helt antall bølgelengder for å få konstruktiv interferens.

Dermed

$$\underline{\underline{m\lambda = d(\sin\theta_r - \sin\theta_i)}} \quad \square.$$

Oppgitt: $m = 2$, $\lambda = 600\ \text{nm}$, $\theta_i = 0°$, $L = 30\ \text{mm}$, $\theta_r = 33°$.

$$\Rightarrow d = m\lambda \frac{1}{\sin\theta_r} = \underline{2.2 \cdot 10^{-6}\ \text{m}}$$

ɔ: repetisjonsavstand.

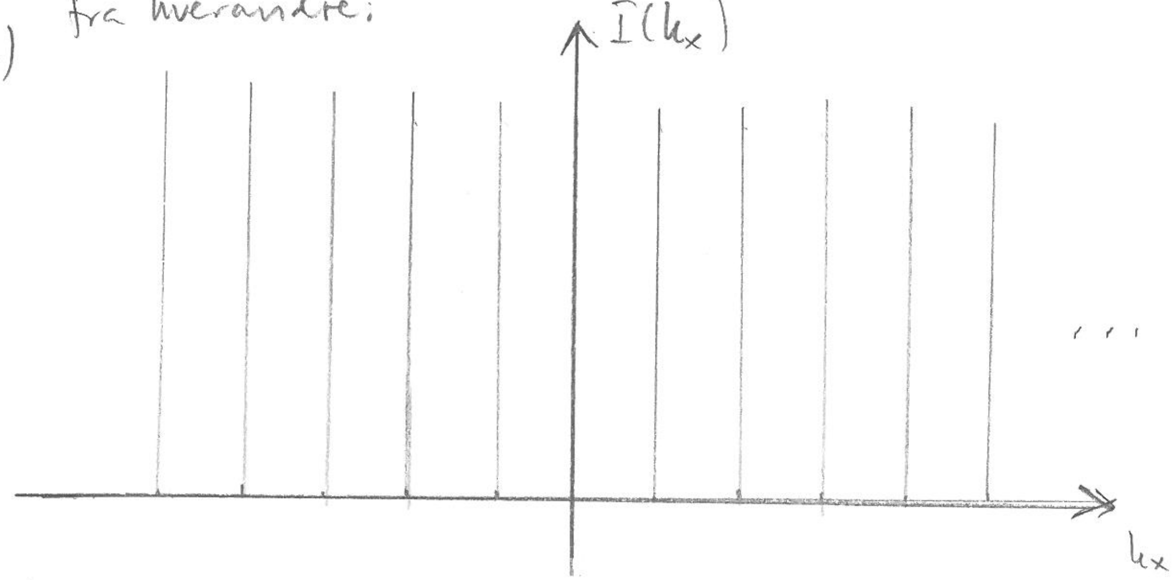
Antall linjer:

$$N = \frac{L}{d} = \underline{\underline{13616 \text{ linjer}}}$$

$$\simeq \underline{\underline{14000 \text{ linjer}}}$$

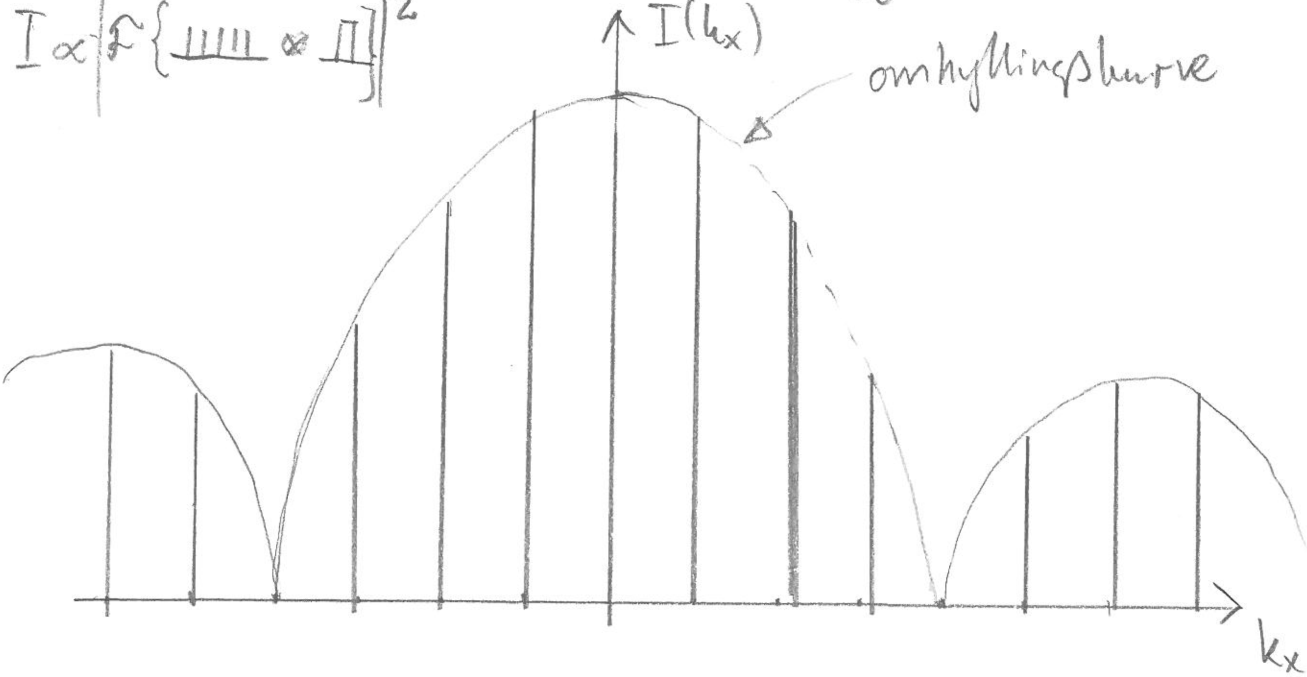
3b) Stort antall tynne spalter, rep. avstand d, gir diffraksjonsmønster bestående av δ-funksjoner i avstand $\frac{2\pi}{d}$ fra hverandre:

i)



ii) Hver tynne spalte erstattes av en spalte med bredde $d/4$. Dette er en konvolusjon i det reelle rommet ⇒ multiplikasjon i Fourier-rommet. Mønsteret fra i) skal altså multipliseres med den Fourier-transformerte (kvadrert) av en rektangulær spalt, som er en sinc-funksjon med første minimum ved $k_x = \frac{8\pi}{d}$ (4. maksimum i i)).

$I \propto \left|\mathcal{F}\{\text{Ш} \ast \Pi\}\right|^2$



3c) Linsa vil avbilde alle <u>parallelle</u> stråler til samme punkt i fokalplanet (per def.) Fraunhofer-diffraksjonsmønsteret kan derfor sees på en skjerm plassert i linsas <u>bakre fokalplan.</u>

(Uten linse kan Fraunhofer mønsteret sees i tilstrekkelig stor avstand fra gitteret til at de interfererende strålene også kan anses å være parallelle).

3d)

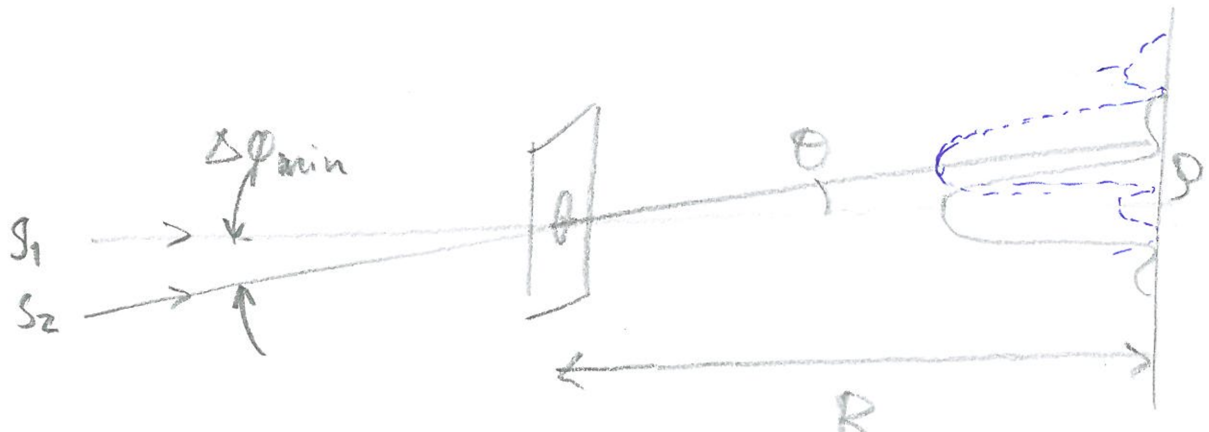
$$I = \left[\frac{J_1\left(\frac{ka\rho}{R}\right)}{\frac{ka\rho}{R}} \right]^2$$

$$J_1\left(\frac{ka\rho}{R}\right) = 0 \Rightarrow \frac{ka\rho}{R} = 3.83 \quad \text{(1. minimum)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a\rho}{R} = 3.83$$

$$\arctan(\theta) = \frac{\rho}{R} \Rightarrow \theta \simeq \frac{\rho}{R}$$

$$\frac{2a}{\lambda}\theta = \frac{3.83}{\pi} = 1.22$$



Vi ser at $\Delta\varphi_{min} = \theta = 1.22\,\dfrac{\lambda}{2a}$

ved Rayleigh-kriteriet: at maksimum for S_1 sammenfaller med minimum for S_2.

3d forts). Hubble: $2a = 2{,}4\,m$

$\lambda = 550\,nm$

$\Rightarrow$ minste oppløste vinkel

$$\Delta\phi_{min} = \frac{1{,}22\,\lambda}{2a} \quad (= 2{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{rad.})$$

Ettersom Saturn er en (minste) avstand $L = 1{,}2 \cdot 10^{9}$ km fra Jorda, gir en minste vinkel $\Delta\phi_{min}$ en transversalt oppløst distanse d,

$$d = L\,\Delta\phi_{min} = L\,\frac{1{,}22\,\lambda}{2a}$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{12}\ \frac{1{,}22\ 550 \cdot 10^{-9}}{2{,}4}\ m$$

$$= 335{,}5\ km$$

$$\simeq \underline{\underline{340\ km}}$$