Løsningsforslag, TFY 4195 Optikk. Des.-17

1a) Det synlige spekteret går fra ca. 400 nm til 700 nm.

Dette svarer til frekvenser $\nu = \frac{c}{\lambda}$ fra hhv. $7{,}5 \cdot 10^{14}$ til $4{,}3 \cdot 10^{14}$ Hz.

Med en energi på 8040 eV vil røntgenfotonet ha en frekvens $\nu = \frac{E}{h} = \frac{8040 \cdot 1.60 \cdot 10^{-19}}{6.62 \cdot 10^{-34}}$ Hz $= 1.9 \cdot 10^{18}$ Hz

$= 1.9$ exaHz

- Bevegelsesmengde $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c} = 4.3 \cdot 10^{-24}$ kgm/s
- Bølgelengde $\lambda = \frac{hc}{E} = 1{,}54 \cdot 10^{-10}$ m $= 0.154$ nm

b) Vi antar at bølgen går i $\vec{k}$-retning. $\vec{E}$ kan da uttrykkes ved:

$$\vec{E} = E_{01}\hat{e}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + E_{02}\hat{e}_2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_2)},$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0, \quad \vec{k} = n\frac{2\pi}{\lambda}\hat{e}_1 \times \hat{e}_2.$$

Spesialtilfelle $\vec{k} \parallel \hat{z}$:

$$\vec{E} = \left(E_{0x}\hat{x}e^{i\varphi_x} + E_{0y}\hat{y}e^{i\varphi_y}\right)e^{i(kz - \omega t)}$$

Jones-vektor beskriver kun polarisasjonen til $\vec{E}$-feltet, $\begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0y}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix}$, når bølgen går i z-retning.

1c) Tynn linse, $f = -0.50\,m$, $M_T = \frac{1}{3}$.

Gauss: $$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

$$M_T \equiv -\frac{s_i}{s_o} = \frac{1}{3} = \frac{y_i}{y_o}$$

Løser for s_o:

$$\frac{1}{s_o} - \frac{3}{s_o} = \frac{1}{f}$$

$$-\frac{2}{s_o} = \frac{1}{f}$$

$$s_o = -2f = \underline{\underline{1.0\,m}}$$

(foran linsen)

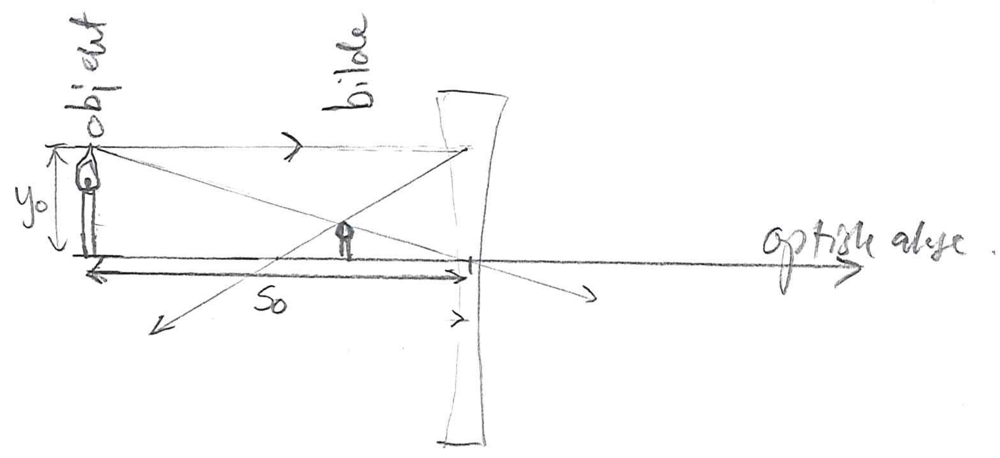
Løser for s_i:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

$$s_i = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}\right)^{-1} = \frac{s_o f}{s_o - f} = -\frac{1}{3}\,m$$

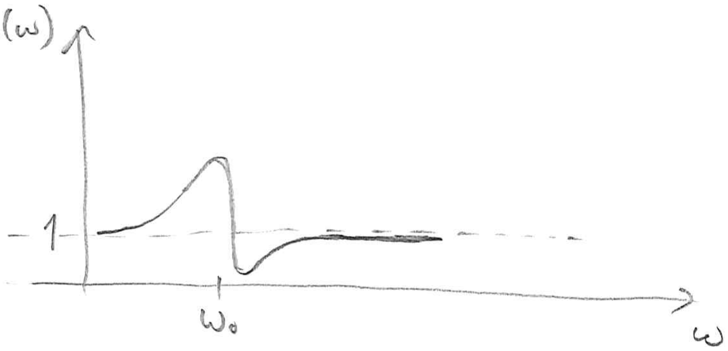
$$\underline{\underline{= -0.33\,m}}$$

(foran linsen)



1d) <u>Prisme.</u> Snells lov $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

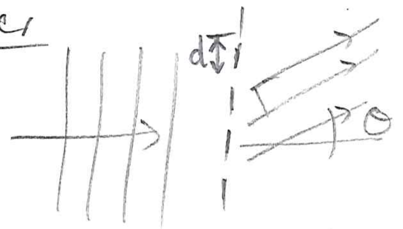
Dispersjon, typisk



Normal dispersjon $\frac{dn}{d\omega} > 0$,
unntatt nær resonansfrekvenser ω_0
(hvor det er absorpsjon og $\frac{dn}{d\omega} < 0$).

⊃: Det "vanlige" er altså at dispersjonen <u>øker med økende frekvens</u>.

<u>Gitter</u>



$$n\lambda = d\sin\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{nc}{\nu} = d\sin\theta$$

⊃: Økende frekvens ν gir mindre spredningsvinkel θ.

Dispersjonen $\frac{d\theta}{d\nu}$ <u>avtar</u> med økende frekvens.

Oppg. 2 a) Vi har $\underline{\underline{M = M_5 M_4 M_3 M_2 M_1}}$

$$\underline{\underline{M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{M_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Med verdiene $f_1 = -10{,}0$ $L = 14{,}0$
$f_2 = 15{,}0$ $s_2 = 50{,}0$

(alle med enhet cm)

fås

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} - \frac{3s_1}{50} & -\frac{3}{50} \\ \frac{52}{3} - \frac{3s_1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

For en stråle som har $\alpha_0 = 0$, $y_0 = 2$

fås $\begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{50} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Svaret er uavhengig av s_1, som forventet for horisontal stråle.

Vinkel i bildeplan $\alpha = -\frac{6}{50} \approx -0{,}12$ [rad]

Posisjon — " — $\underline{\underline{y = -\frac{6}{5} \approx -1{,}20 \text{ [cm]}}}$

2b) Betingelse for avbildning: $\underline{\underline{C = 0}}$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$C = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{ɔ:} \quad y' = Dy$$

slik at alle stråler fra y i objektplanet samles i y' i bildeplanet (uavh. av α).

$$C = 0 \Rightarrow \frac{52}{3} - \frac{3 s_1}{5} = 0$$

$$s_1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{52}{3} \approx \underline{\underline{28{,}9 \text{ cm}}}$$

$$\underline{\underline{M_T \equiv -\frac{y'}{y} = -D = \frac{3}{5}}}$$

Bildet er forminsket og opp-rett.

2e) Det er to muligheter for hva som er aperturblender/AS: L1 eller L2. Begge linser har diameter D.

- Hvis L1 er AS, er L1 også inngangspupille.
  Da er åpningsvinkelen $\beta_1 = \arctan \frac{D/2}{S_1}$.

- Hvis L2 er AS, må vi beregne dens avbildning gjennom L1:

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}, \quad f = f_1 = -10\text{ cm}, \quad s_0 = L = 14\text{ cm}$$

$$s_i = \frac{L f_1}{L - f_1} \approx -5{,}8 \text{ [cm]}.$$

Ettersom s_i er negativ, er bildet på samme side av linsa som objektet.

Linsene har samme diameter

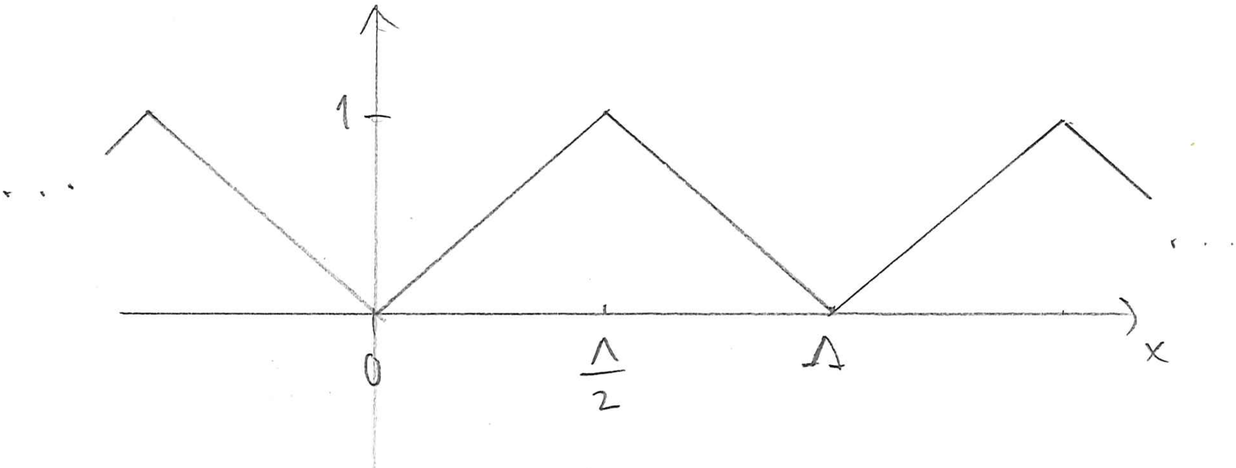
$$\Rightarrow \beta_2 < \beta_1 \qquad \underline{\underline{\text{L2 er AS}}}$$

ettersom $\beta_2 = \arctan \frac{D/2}{S_1 + S_i}$

Svar: L2 er AS. Inngangspupillen ligger 5,8 cm nedstrøms fra L1.

Oppgave 3.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\Lambda}, & 0 < x < \dfrac{\Lambda}{2} \\ \dfrac{2}{\Lambda}(\Lambda - x), & \dfrac{\Lambda}{2} < x < \Lambda \end{cases}$



(Alle sinus-ledd har odde symmetri og er derfor fraværende i Fourier-rekken til en like-funksjon.)

(Vi ser direkte at a_0 leddet ("gjennomsnittet") er $\frac{1}{2}$.

Evt.: $a_0 = \frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda f(x)\,dx = \ldots = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.)

(Vedr. diffraksjon og F.T., se svar gitt i b)).

3a) forts. Oppgitt: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\Lambda}$

Ved å benytte at $\cos u = \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu})$ fås umiddelbart

$$f(x) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{i\frac{n\pi x}{\Lambda}} + e^{-i\frac{n\pi x}{\Lambda}}\right)$$

Med $a_n = 0$ for oppgitte n, og $n \leq 6$, fås

$$\underline{f(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2\left(e^{i\frac{2\pi x}{\Lambda}} + e^{-i\frac{2\pi x}{\Lambda}}\right) + \frac{1}{2}a_6\left(e^{i\frac{6\pi x}{\Lambda}} + e^{-i\frac{6\pi x}{\Lambda}}\right)}$$

Når man skal regne ut den Fouriertransformerte av dette, fås uttrykk på formen $\int e^{i\left(k_x x + \frac{n\pi x}{\Lambda}\right)} dx$ som ved Fourier-shift-teoremet er $\delta\left(k_x + \frac{n\pi}{\Lambda}\right)$

Det følger at

$$\underline{F(k_x) = a_0\delta(k_x) + \frac{a_2}{2}\delta\left(k_x \pm \frac{2\pi}{\Lambda}\right) + \frac{a_6}{2}\delta\left(k_x \pm \frac{6\pi}{\Lambda}\right)}$$

Kommentar:

Når betingelsene for Fraunhoferdiffraksjon er oppfylt ("fjernfelt"), er amplituden til E-feltet i detektorplanet gitt ved Fouriertransformasjonen av transmisjonsfunksjonen til det diffrakterende objektet.

Intensiteten er gitt ved absolutt-kvadratet av amplituden,

$$\underline{I \sim |\mathcal{F}\{t(x,y)\}|^2.}$$

3b) $t(x,y) = f(x)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{y}{w}\right)$

$\Lambda = 2\,\mu m$

I detektorplanet måles $I(X,Y)$, som er gitt ved $|F.T.|^2$.

Oppgitt: $a_n \neq 0$ for $n = 0, 2, 6, 10, 14, \dots$

$a_0 = \frac{1}{2}$ $\quad a_0^2 \simeq 0.25$

$$a_2 = \frac{4}{2^2\pi^2}\left(2\cos\frac{2\pi}{2} - \cos 2\pi - 1\right) = \frac{-4}{\pi^2} \approx -0.405$$

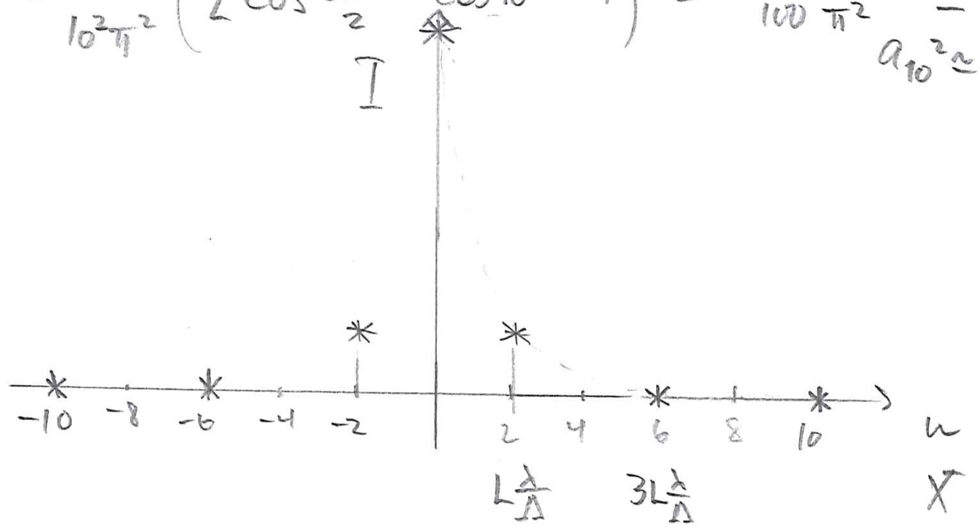
$a_2^2 \simeq 0.16$

$$a_6 = \frac{4}{6^2\pi^2}\left(2\cos\frac{6\pi}{2} - \cos 6\pi - 1\right) = -\frac{4}{9}\frac{1}{\pi^2} \approx -0.045$$

$a_6^2 \simeq 0.002$

$$a_{10} = \frac{4}{10^2\pi^2}\left(2\cos\frac{10\pi}{2} - \cos 10\pi - 1\right) = -\frac{16}{100}\frac{1}{\pi^2} \approx -0.016$$

$a_{10}^2 \simeq 2.6\cdot 10^{-4}$



Gitteret gir "ingen begrensning" i y-retning ($w \gg \lambda$):

$\Rightarrow I(X,Y) \propto \delta(Y)$.

Relative intensiteter:

$I_0 := 1$

$$I_2/I_0 = \frac{\left(\frac{1}{2}a_2\right)^2}{a_0^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{4}{\pi^2}\right)^2}{\left(1/2\right)^2} = 0.16$$

$$I_6/I_0 = \frac{\left(\frac{1}{2}a_6\right)^2}{a_0^2} = a_6^2 = 0.002$$

3b) forts. $L = 4{,}00\ m$, $\lambda = 633\ nm$, $\Lambda = 2{,}00\ \mu m$.

$n=0$: $k_x = k\sin\theta_x = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{X}{L} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{X=0}}$

$n=2$: $k_x = k\sin\theta_x = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{X}{L} = \pm\frac{2\pi}{\Lambda} \Rightarrow X = \pm L\frac{\lambda}{\Lambda}$

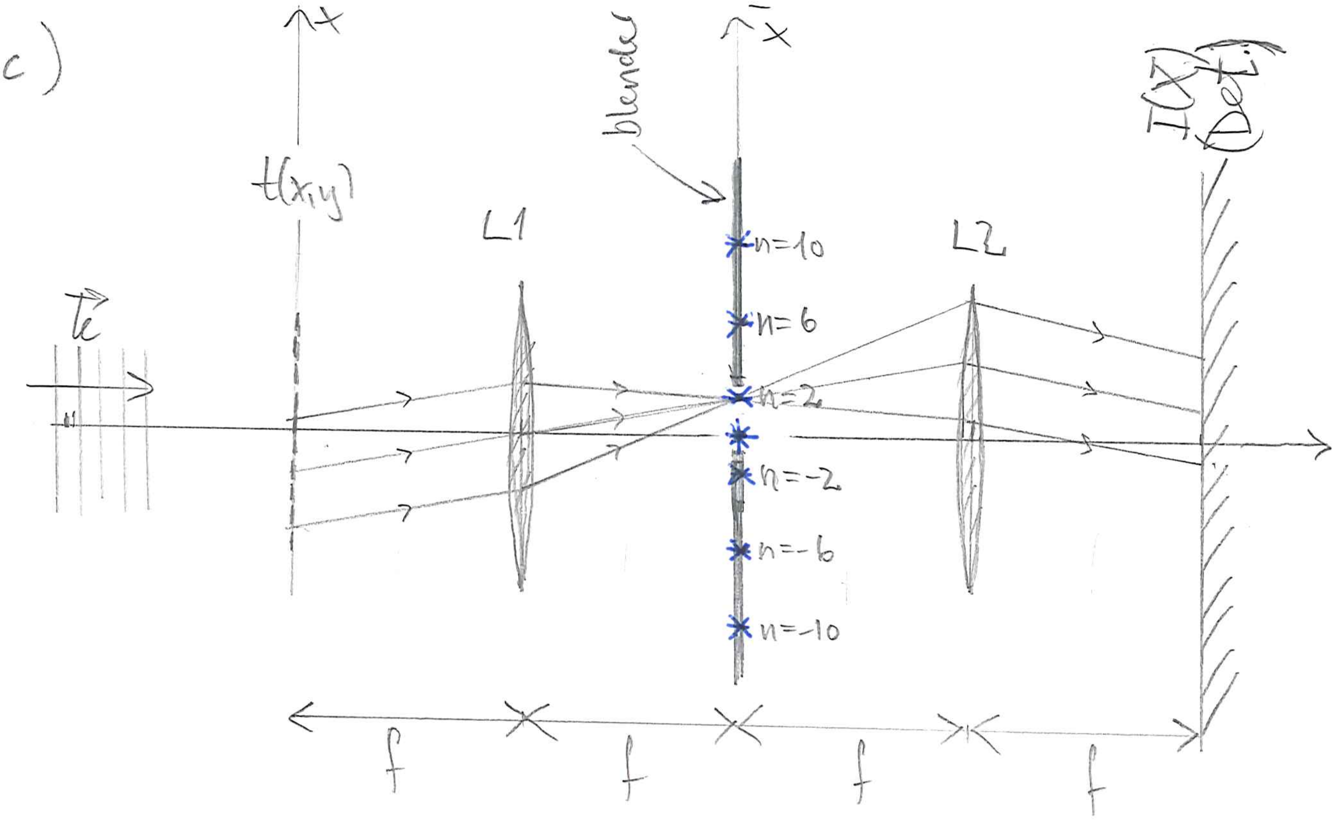
$\underline{\underline{= \pm 1.27 m}}$

$n=6$: $k_x = k\sin\theta_x = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{X}{L} = \pm\frac{6\pi}{\Lambda} \Rightarrow X = \pm 3L\frac{\lambda}{\Lambda}$

$\underline{\underline{= 3.80 m}}$

(Note: $F = \frac{a^2}{L\lambda} < 1$, Fraunhofer-regime, OK).

3c)



Blenderen skal kun la $n = \{0, 2\}$ passere, som vist. Den må altså plasseres usymmetrisk.

Jmf 3c) må vi ha at $x' = +f\frac{\lambda}{\Lambda}$.

<u>Minste</u> mulige spalteåpning er avstanden fra nullte til andre diffraksjonsorden, dvs $f\frac{\lambda}{\Lambda}$

$$f\frac{\lambda}{\Lambda} = 0{,}20\,\text{m}\,\frac{633\text{ nm}}{2{,}00\ \mu\text{m}} = 63{,}3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{6}\text{ m}$$

$$\underline{\underline{= 63{,}3\text{ mm}}}$$

Største mulige spalteåpning er avstanden fra (−2). til (+6). diffraksjonsorden, dvs

$$3f\frac{\lambda}{\Lambda} - \left(-f\frac{\lambda}{\lambda}\right) = 4f\frac{\lambda}{\Lambda} \underline{\underline{= 25{,}3\text{ cm}}}$$