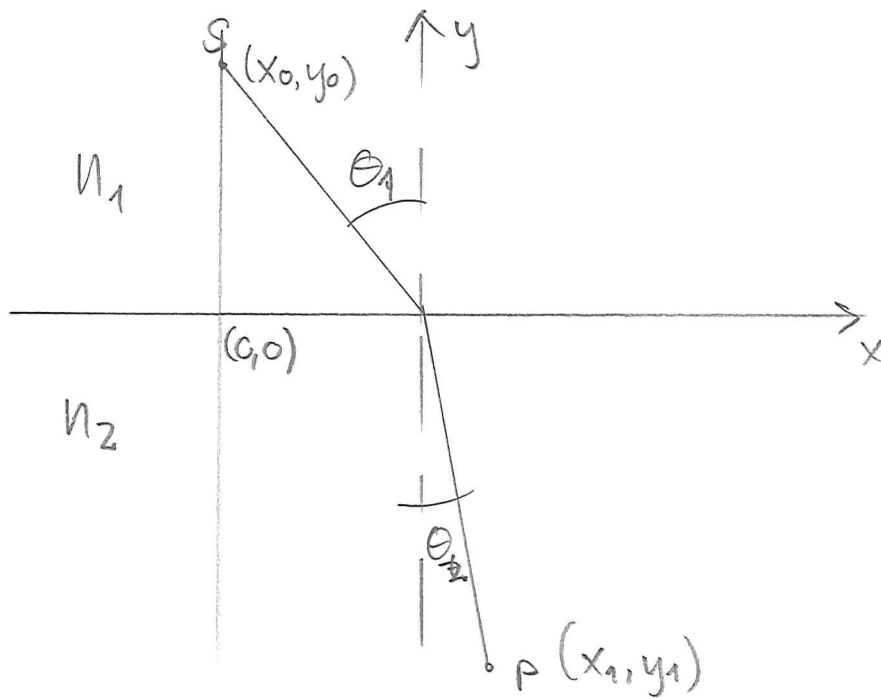


# Lesningsforslag TFY 4195, August 2018.

1a) Fermats prinsipp sier at lyset velger den banen som tar kortest tid.



Vi antar geometrisk optikk og at lyset går i rette linjer i områder med konstant  $n$ .

Snell:  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .  $v_i = \frac{c}{n_i}$

Velger  $x$  som fri variabel, grenseflate langs  $x$ -akse, startpunkt i  $x=0, y=y_0$ .

$$s = \frac{1}{v_1} \sqrt{x^2 + y_0^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = 2n_1 \underbrace{(x^2 + y_0^2)^{-\frac{1}{2}} x}_{= \sin \theta_1} + 2n_2 \underbrace{((x_1 - x)^2 + y_1^2)^{-\frac{1}{2}} (x_1 - x)(-1)}_{= \sin \theta_2} = 0$$

$$\underline{\underline{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2}} \quad \text{q.e.d.}$$

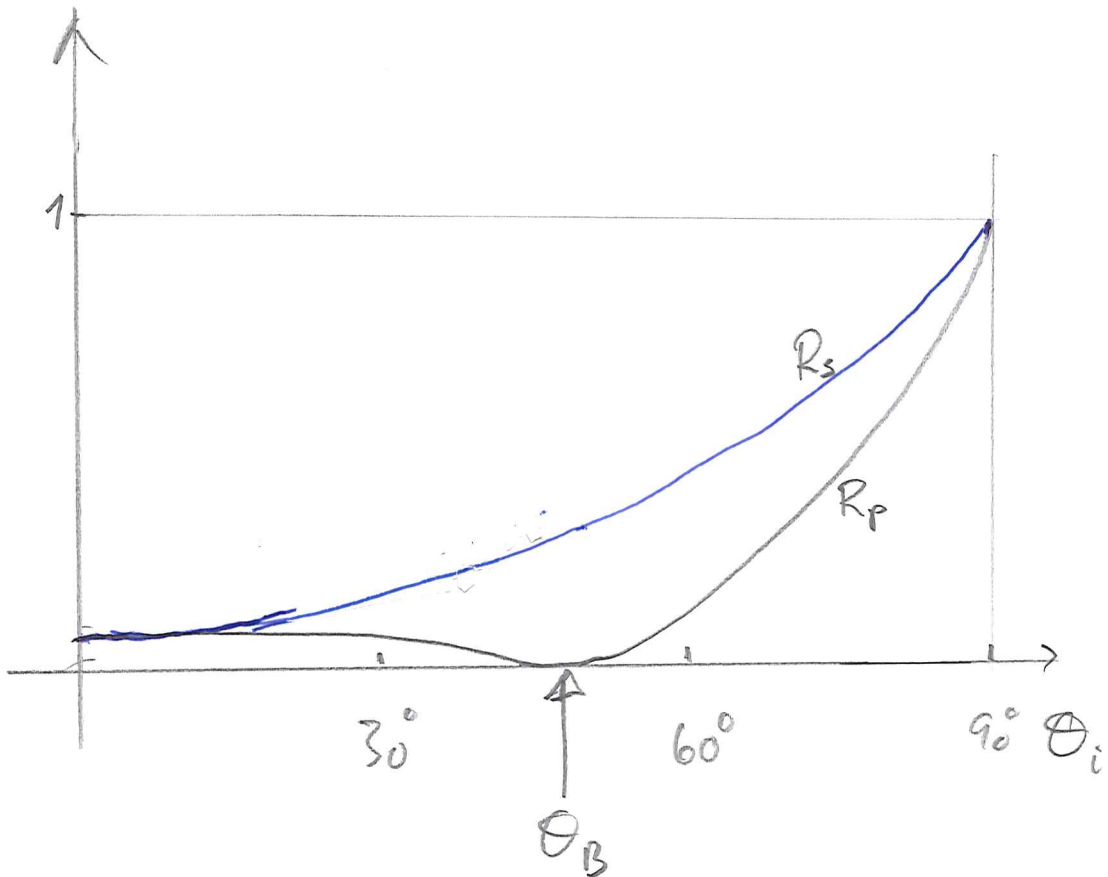
1b) Ved Brewster-vinkelen blir alt p-polarisert lys transmittert og refleksjonen  $R_p$  er dermed lik null (se Hecht 5. ed side 131).

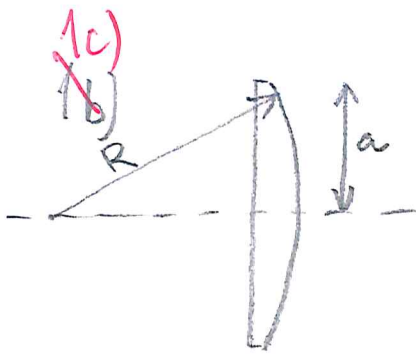
Vi vet dermed at  $T_p = 1$ .

$$T = \frac{1}{2}(T_p + T_s) = 0.86$$

$$\Rightarrow T_s = 0.72$$

Ettersom  $R_s + T_s = 1$ , fås  $R_s = 0.28$





$$a = 20 \text{ mm}$$

$$R = 100 \text{ mm}$$

$$f = 180 \text{ mm}$$

Vi har 
$$\frac{1}{f} = \frac{n_{\text{lens}} - n_{\text{medium}}}{n_{\text{medium}}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

med  $n_{\text{medium}} = 1$ ,  $R_1 = \infty$  og  $R_2 = -100$ .

$$\frac{1}{f} = \frac{n - 1}{1} \left( \frac{-1}{R_2} \right)$$

$$n = \frac{-R_2}{f} + 1$$

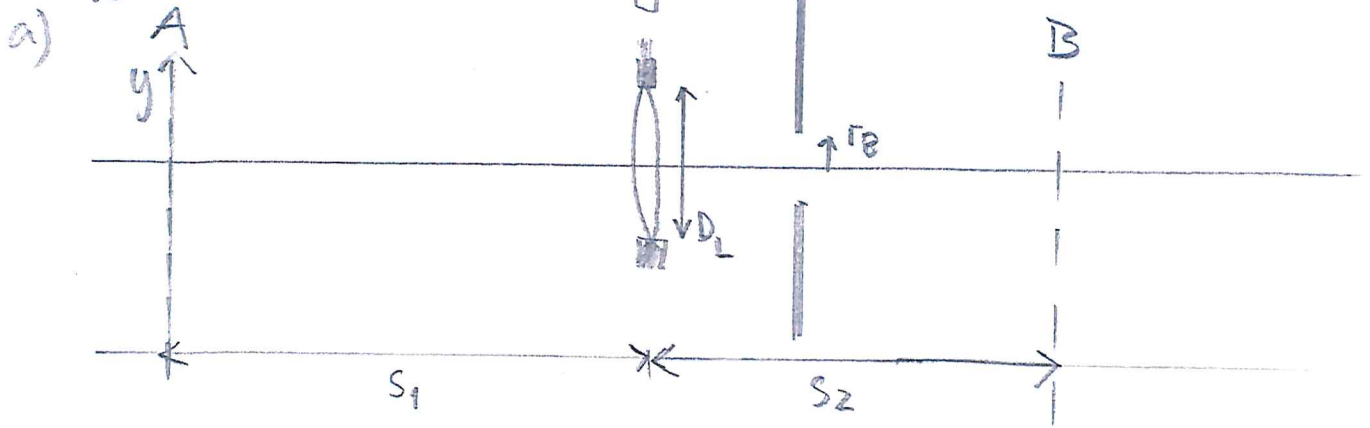
$$= \frac{100}{180} + 1 = \underline{\underline{1,56}} \quad (\text{for } \lambda = 632,8 \text{ nm})$$

Bølglængden for Ar-laseren er kortere, slik at frekvensen (og energien) er høyere.

I de fleste tilfeller ("normalt") øker dispersjonen med frekvens, dvs  $\frac{dn(\omega)}{d\omega} > 0$ .

Vi forventer derfor at  $f$  er kortere for lys fra Ar-laseren.  $\underline{\underline{f_{Ar} < 180 \text{ mm}}}$

Oppg 2



a)  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  beskriver hvordan strålen  $\begin{bmatrix} nx \\ y \end{bmatrix}$

går fra A til B,  $\alpha$  er vinkel,  $y$  er posisjon.

M er et produkt av en translasjon fra A til L, etterfulgt av brytning i L, og transmisjon fra L til B:

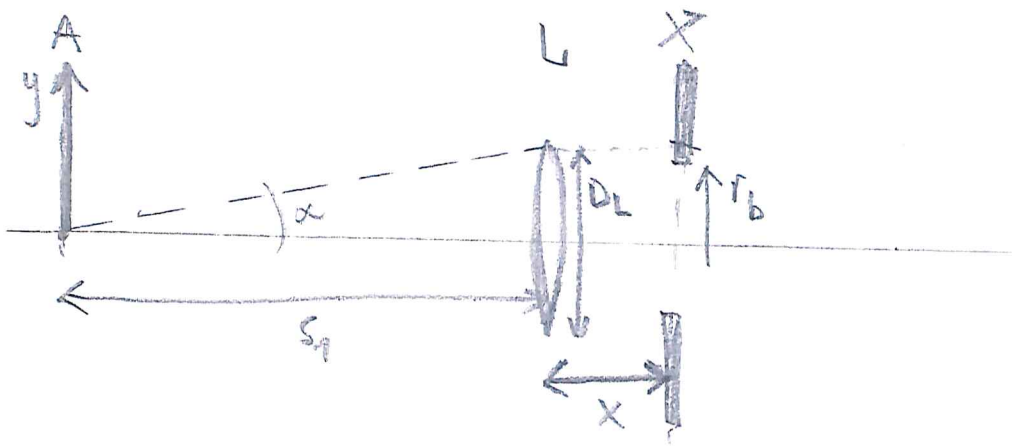
$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ s_2 & -\frac{s_2}{f} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{s_1}{f} & -\frac{1}{f} \\ s_1 + s_2 - \frac{s_1 s_2}{f} & 1 - \frac{s_2}{f} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi ser at A er gitt ved  $A = 1 - \frac{s_1}{f}$

Denne formalismen forutsetter:

- geometrisk optikk (lys går i rette linjer)
- paraksial (stråler har liten vinkel med optisk akse).

2b)



Vi ser at vi kan bruke matrisen fra

a) for å finne den marginale strålers posisjon ved planet  $\bar{X}$ ;  $y_x$ , ved å la  $s_2 = x$ .

Ved planet A har strålen posisjon  $y_A = 0$

og vinkel  $\alpha = \arctan\left(\frac{D_L/2}{s_1}\right) = \frac{D_L}{2s_1}$  (parax.)

Dermed

$$\begin{bmatrix} nx \\ y_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{s_2=x} \begin{bmatrix} D_L/2s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vi ser at } y_x = C \cdot \frac{D_L}{2s_1} + \cancel{D \cdot 0}$$

$$= \left(s_1 + x - \frac{s_1 x}{f}\right) \frac{D_L}{2s_1}$$

$$= \frac{1}{2} D_L x \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{f}\right)$$

For at blenden skal være aperturstopp (AS), må det være blenden som begrenser strålen,

$$\text{dvs. } \underline{r_b < y_x.}$$

2b forts.

Etersom det ikke er noen optiske element "nedstrøms" for blenden, må blenden selv være utgangspupille når blenden er AS.

Altså: utgangspupillen er i planet  $X$

Inngangspupillen finnes ved  $\omega$  avbilde AS gjennom linsen. Vi bruker Gauss' linseformel:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow \underline{s_i = \frac{xf}{x-f}}$$

Det er oppgitt at  $f > 0$  og at  $0 < x \leq f \Rightarrow s_i < 0$ .

Det er derfor klart at inngangspupillen ligger en avstand  $s_i$  til høyre (nedstrøms) for L.

(og også til høyre for  $X$ ).

2c) Hvis  $D=0$  må vi ha at  $1 - \frac{x}{f} = 0$ ,

dvs.  $x=f$  slik at blenden er plassert i fokalplanet til linsa.

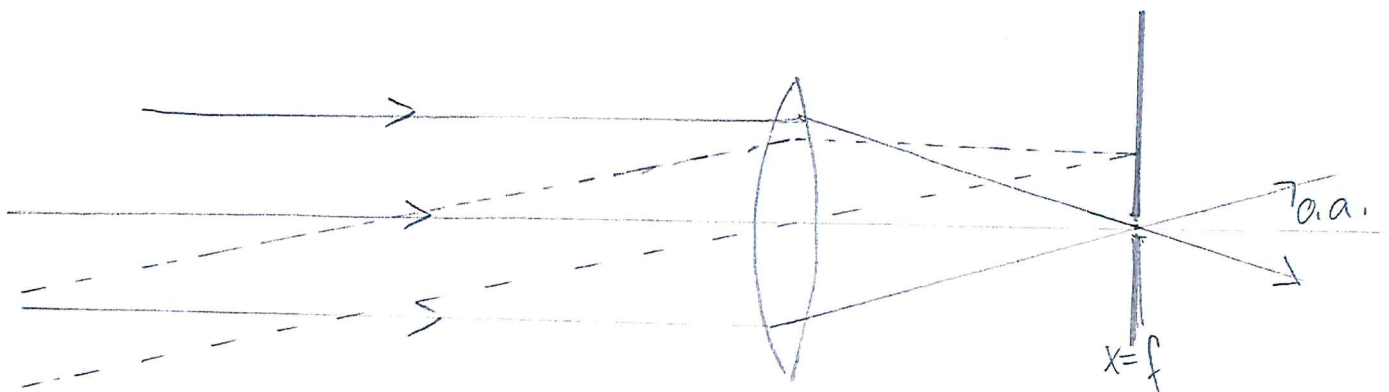
Dette innebærer at blenden (gitt  $r_b < y_x$ ) vil være AS, og inngangspupillen vil være i  $-\infty$ .

I praksis innebærer dette at kun stråler som er parallelle med den optiske akse slipper gjennom systemet.

$\Rightarrow$  Systemet er "telesentrisk på objektsiden" <sup>4\*</sup>

Telesentriske system brukes bl.a. i maskin-syn for roboter fordi bildet ikke har perspektiv da alle stråler er parallelle: Alle gjenstander avbildes derfor med sin riktige størrelse, uavhengig av om de er nær eller langt unna observatøren.

\* gitt at blendens radius er tilstrekkelig liten til at innkommende stråler må være parallelle med den optiske akse:



3a)  
2a)

En enkelt spalte i Fraunhofer-regimet gir diffraksjonen som kan beskrives v/ Fouriertransformasjon av objektet, kvadrert,

$$\begin{aligned} F(k_x) &= \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} f(x) e^{ik_x x} dx \\ &= \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} e^{ik_x x} dx = \frac{1}{ik_x} \left[ e^{ik_x x} \right]_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \\ &= \frac{1}{ik_x} \left( e^{ik_x \frac{w}{2}} - e^{-ik_x \frac{w}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{ik_x} 2i \sin\left(k_x \frac{w}{2}\right) = w \frac{\sin\left(\frac{k_x w}{2}\right)}{\frac{k_x w}{2}} \\ &= w \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x w}{2}\right) \quad (\text{se også formelsamling}) \end{aligned}$$

$$I(k_x) = I(k \sin \theta) \propto |F(k_x)|^2$$

$$\sin \theta = \frac{x}{z} \quad \underline{\underline{= w^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_x w}{2}\right)}}$$

Første minimum er ved  $\frac{k \sin \theta_1 w}{2} = \pi$

$$\Rightarrow \theta_1 = \arcsin\left(\frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{\frac{2\pi}{\lambda} w}\right) = \arcsin\left(\frac{\lambda}{w}\right)$$

$$= \underline{\underline{3,63^\circ}} \quad |_{w=10\mu\text{m}}$$

Vi ser at  $\theta_1$  avtar hvis  $w$  øker, som forventet.



3b) Stor avstand  $\Rightarrow$  Fraunhofer  $\Rightarrow I \sim |\mathcal{F}\{\text{objekt}\}|^2$

Her: 3 spalter. Vi velger  $x=0$  midt i spalte 2, fordi høy symmetri gir enklere uttrykk.

Hver spalte spres lys med "styrke"  $f_n(x)$ .

Ved å summere amplitudene fås

$$F = f_n(x) [\delta(x-a) + \delta(0) + \delta(x-a)] = f_n(x) \sum_{n=-1}^1 \delta(x-na)$$

Intensiteten  $\sim |\mathcal{F}\{F\}|^2$  som gir gitte uttrykk.  $\square$

At vi summerer amplituder fortsetter koherent stråling. (For helt ikke-koherent stråling ville man i stedet måtte summere intensitetene,

$$I_{\text{ikke-koh}} \propto 3 |\mathcal{F}\{f_n(x)\}|^2$$

Etersom lign.(1) er FT. av en konvolusjon, gir konvolusjonsteoremet

$$I \propto \underbrace{|\mathcal{F}\{f_n(x)\}|^2}_{\text{gitte i a)}} |\mathcal{F}\{\sum_{n=-1}^1 \delta(x-na)\}|^2$$

3b for b

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-1}^1 \delta(x-na)\right\}$$

$$= \int e^{ik_x x} \left(\sum_{n=-1}^1 \delta(x-na)\right) dx$$

$$= \sum_{n=-1}^1 \int e^{ik_x x} \delta(x-na) dx = \sum_{n=-1}^1 e^{ik_x na}$$

$$= 1 + e^{ik_x a} + e^{-ik_x a} = \frac{1 + 2\cos(k_x a)}{1}$$

$$\text{ert.} \approx \frac{\sin(3k_x a/2)}{\sin(k_x a/2)} e^{ik_x a}$$

Dermed:

$$\underline{\underline{I \propto w^2 (1 + 2\cos k_x a)^2 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{k_x w}{2}\right)}}$$

$$\underline{\underline{= w^2 \frac{\sin^2(3k_x a/2)}{\sin^2(k_x a/2)} \text{sinc}^2\left(\frac{k_x w}{2}\right)}}$$

### Oppg 3c

(Med en samleboks ved  $s = 18,0 \text{ cm}$  f.ø.s. avbildning ved  $s'$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{s}\right)^{-1} = \frac{sf}{s-f} = 90 \text{ cm}$

Forstørrelsen blir  $|M| = \frac{s'}{s} = \frac{90}{18} = \underline{5}$

Den største vinkelen som slipper gjennom linse er  $\theta_{\max} = \arctan\left(\frac{1 \text{ cm}}{18 \text{ cm}}\right) \approx \underline{3,18^\circ}$

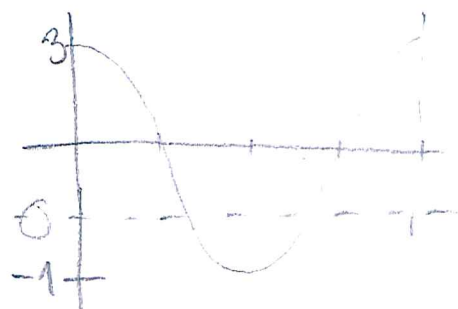
Hovedmaksima for interferensfunksjonen  $(1 + 2\cos k_x a)^2$  er for  $k_x a = n 2\pi$ .

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta a = n 2\pi$$

$$\underline{\theta = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{a}\right)}$$

$$\underline{\approx n \frac{\lambda}{a}}$$

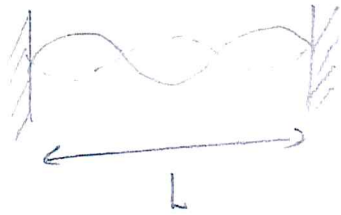
Vi ser at  $n \leq 9$  slipper gjennom linse.



At de høyere ordens diffraksjonstoppene ikke slipper gjennom, vil gi redusert oppløsning i avbildningen. 9 ordener bør likevel gi et "godt" bilde av gitteret.

4a)  
5a)

Laserlys er tilnærmet monokromatisk fordi bølglengden tilsvare bestemte energioverganger i materialet som sender ut lyset. I tillegg må bølglengden passe med den laserkaviteten som benyttes slik at det blir et stående bølgefelt,

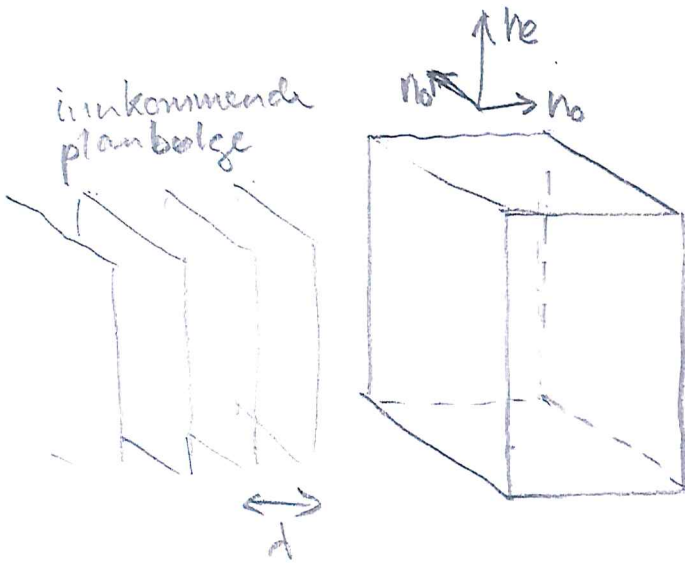


$$n \frac{\lambda}{2} = L$$

Laserlyset er tilnærmet parallelt fordi kun bølger som forplanter seg vinkelrett på speilene "overlever" slik at de kan bidra til stimulert emisjon av flere (identiske) fotoner.

4b)  
3c)

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d$$



$$e^{i n_o k d} = e^{i \phi_o} \text{ ordinerer}$$

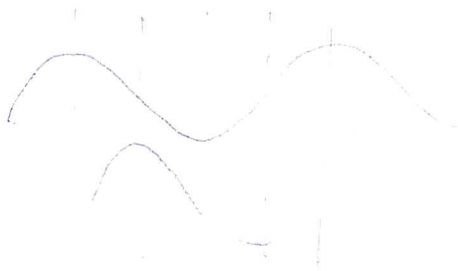
$$e^{i n_e k d} = e^{i \phi_e} \text{ ekstra-ordinerer.}$$

$$\Delta\phi = |\phi_o - \phi_e|$$

$$= |n_o k d - n_e k d|$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d \quad \square$$

Kvartbølgeplate: For gitt  $n_o, n_e$  og  $\lambda$  er  $d$  slik at faseforskjellen tilsvarende  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d$$

$$|n_o - n_e| = |1.54 - 1.55| = 0.01$$

$$d = \frac{\lambda}{4} \frac{1}{|n_o - n_e|} = \frac{632}{4} \frac{1}{0.007} \text{ nm}$$

$$= 15800 \text{ nm} = 15.8 \mu\text{m}$$

$$= 17.4 \mu\text{m}$$

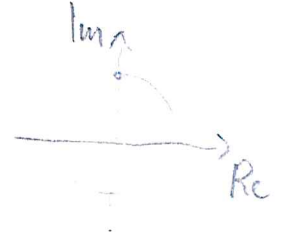
Jones: 
$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}' = M_{\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

3c forts)

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}' = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

$$= e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} E_x \\ \pm i E_y \end{bmatrix}$$

$$= e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} E_x \\ e^{\pm i\pi/2} E_y \end{bmatrix}$$



Vi ser at den ene komponenten av Jones-vektoren  $E_y$ ,  
har fått en faseforskyll tilsvarende  $\pm \frac{\pi}{2}$   
i forhold til den andre komponenten.