NORGES TEKNISK NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Anne Borg
Tlf. 93413

BOKMÅL

EKSAMEN I EMNE SIF 4042 OPTIKK VK

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Tirsdag 28. mai 2002
Tid: Kl. 0900 - 1500

Hjelpemiddelkode C:
Bestemt, enkel kalkulator
K. Rottmann: Matematisk formelsamling

Sensuren faller 18. juni 2002

Oppgave 1

I en isolator bestående av N identiske atomer pr. volumenhet induseres elektriske dipoler pga. et ytre elektromagnetisk felt. Det induserte dipolmomentet kan beskrives ved en klassisk modell der et elektron med ladning e og masse m forskyver seg en avstand r(t) i forhold til hvert atom, som i et masse-fjær system. Dempningskoeffisienten for elektronbevegelsen er γ.

a) Vis at dielektrisitetskonstanten $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ i denne modellen er gitt ved

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

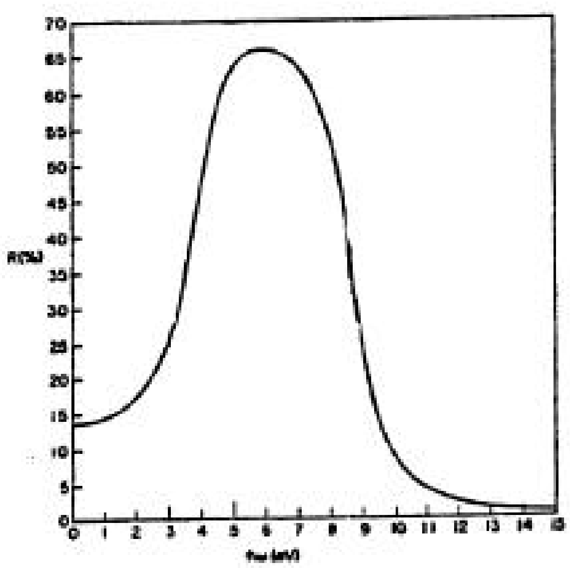
$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Hva er konstantene ω_0 og ω_p i dette tilfellet?
Skisser ε_1 og ε_2 for det tilfellet at

$$E_0 = \hbar\omega_0 = 4{,}0\text{eV}$$
$$E_p = \hbar\omega_p = 8{,}0\text{eV}$$
$$E_\gamma = \hbar\omega_\gamma = 1{,}0\text{eV}$$

Angi spesielt $\varepsilon_1(0)$, $\varepsilon_1(\infty)$, ω_0 og ω_L.

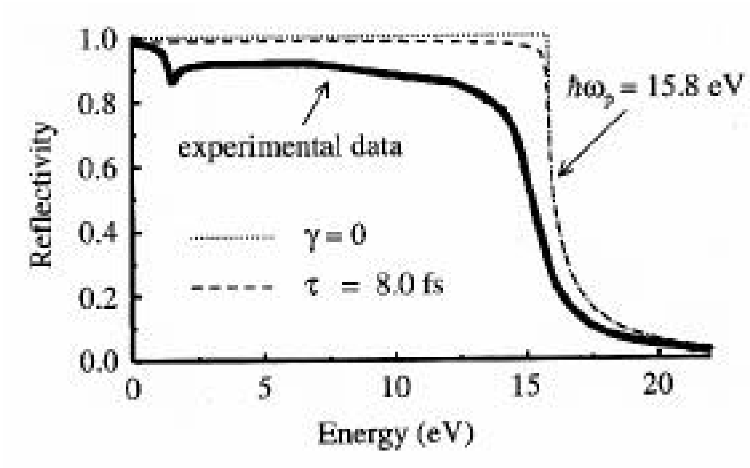
b) Reflektansen som funksjon av energi for systemet i punkt a) er vist i figur 1. Diskuter og begrunn i hvilke energiområder materialet er transmitterende, reflekterende og absorberende.



Figur 1

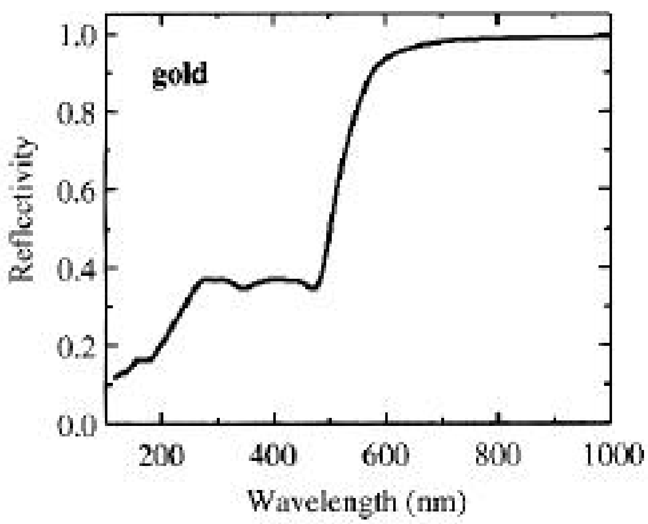
c) Figur 2 viser målt reflektans ved normalt innfall for aluminium og tilsvarende reflektans beregnet ved hjelp av fri-elektron-modellen (Drude-modellen) med $\hbar\omega_p = 15{,}8\,\text{eV}$. Prikket linje viser beregningen uten dempning, mens den stiplete linjen viser beregningen med dempning $\tau = \frac{1}{\gamma} = 8{,}0 \; 10^{-15}\text{s}$.

Beregn med utgangspunkt i fri-elektron-modellen uten dempning, reflektansen ved normalt innfall for aluminium for $\hbar\omega < \hbar\omega_p$. Hva er den fysiske tolkningen av energien $\hbar\omega_p$? Diskuter kort forskjellen mellom den observerte (målte) reflektansen for aluminium og reflektansen beregnet fra Drudemodellen.



Figur 2

Figur 3 viser reflektansen ved normalt innfall for gull som funksjon av bølgelengde. Gull har fylte d-bånd som ligger et stykke under Ferminivået i energi. Diskuter kort formen på spekteret og anslå energiforskjellen mellom toppen av d-båndene og Ferminivået. Forklar den karakteristiske fargen til gull ut fra figur 3.



Figur 3

d) Kvantemekanisk er imaginærdelen til dielektrisitetskonstanten, $\varepsilon_2(\omega)$, gitt av

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi e^2}{m^2 \varepsilon_0 \omega^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |M|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

der E_f er energien i sluttilstanden og E_i er energien i begynnelsestilstanden for en optisk overgang i −> f.

Anta at vi har en halvleder med direkte båndgap E_g. Valensbåndet har en parabolsk E(k) med hull-masse m_h og ledningsbåndet er også av parabolsk form med masse m_e. Anta at matriseelementet M for en optisk overgang nær k=0 er konstant. Vis at "joint density of states" for systemet er $\sqrt{\hbar\omega - E_g}$ og at ε_2 dermed er av formen

$$\varepsilon_2 \quad \frac{1}{\omega^2}\sqrt{\hbar\omega - E_g} \quad \text{for } \hbar\omega > E_g$$
$$\varepsilon_2 = 0 \quad \text{for } \hbar\omega < E_g$$

Oppgitt: Plancks konstant $h = 6{,}626\ \ 10^{-34}\,\mathrm{Js}$
Elektronets ladning $e = 1{,}6022\ \ 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Lyshastigheten i vakuum $c = 3{,}00\ \ 10^{8}\,\mathrm{m/s}$

Oppgave 2

a) Gjør kort rede for begrepene

Jones vektor
Stokes vektor
Jones matrise
Mueller matrise

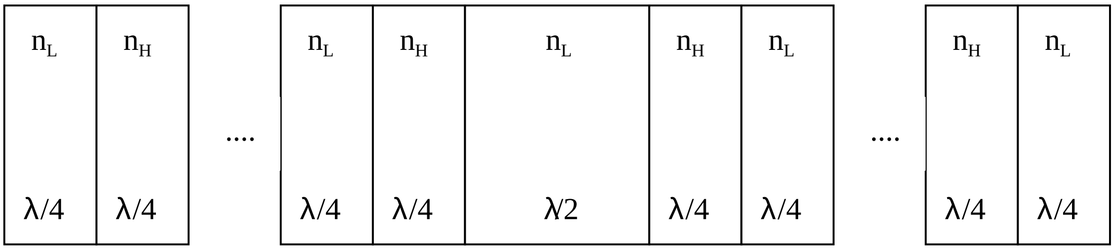
Jones matrisen til en faseforsinker med hurtig horisontal akse kan skrives

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix}$$

Denne faseforsinkeren plasseres i et optisk system slik at den hurtige aksen danner vinkelen α med horisontal akse. Beregn Jones matrisen i kartesisk basis i dette tilfellet.

b) Beregn transmisjonen for lys som er lineærpolarisert langs x-aksen (horisontal akse) gjennom retarderen beskrevet i punkt a) for det tilfellet at $\delta = \pi/2$ og $\alpha = 45^{o}$. Beregn Stokes vektoren og polarisasjonsgraden til det transmitterte lyset. Hva slags polarisasjonstilstand har dette lyset?

c) Et filter er laget av en struktur som vist i figur 4 og består av vekselvise lag av ZrO_2 og MgF_2. $n_H = n_{ZrO_2} = 2{,}10$ og $n_L = n_{MgF_2} = 1{,}37$. Hva slags filter er dette?
Filteret er designet for en bølgelengde λ=500nm og skal ha en båndbredde mindre enn 50nm. Hvor mange par av λ/4-belegg må filteret ha på hver side av λ/2-laget for å få korrekt båndbredde?



Figur 4

d) En planbølge sendes fra luft inn mot en plan flate av en kvartskrystall under en innfallsvinkel på 30°. Kvarts er et uniaksialt, dobbelbrytende materiale med ordinær brytningsindeks n_o=1,544 og ekstraordinær brytningsindeks n_e=1,553. Optisk akse ligger i innfallsplanet og står vinkelrett på innfallende stråle. Beregn bølgevektorene for de brutte strålene og angi de tilhørende polarisasjonsretningene. Vil strålene ha samme retning som bølgevektorene i dette tilfellet. Begrunn kort svaret.
Hint: Utnytt at n_o og n_e er omtrent like i utregningene.

Oppgave 3

a) En argonlaser, med brytningsindeks n=1,00, har en sfærisk, symmetrisk laserkavitet med lengde 1,00m. Rayleighområdet z_0=0,50m. Diskuter kort hva slags lasermoder som kan opptre i laseren. Beregn de mulige laserfrekvensene og tegn en figur som viser hvilke frekvenser man vil ha for ulike moder.

Argonatomene kan gi opphav til flere ulike laserlinjer, bl.a. ved 515nm og 488 nm. Beskriv kort hvordan man kan velge ut en av disse for en gitt lengde av kaviteten.

b) Forklar kort hva som menes med homogen og inhomogen forbredning i et lasermedium. Gi eksempel på slike forbredningsmekanismer. Diskuter kort hvordan antall longitudinelle lasermoder i “steady state operation” påvirkes av hvilken type forbredningsmekanisme vi har i lasermediet.

c) I en halvleder er sannsynligheten for at de ulike energinivåene er besatt av et elektron gitt av Fermi-fordelingen:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left[\frac{E - E_f}{k_B T}\right] + 1}$$

der E_f = Fermienergien, k_B = Boltzmanns konstant og T = absolutt temperatur.
Vis at sannsynligheten for absorpsjon av fotoner alltid er større enn sannsynligheten for emisjon når halvlederen er i termisk likevekt.

I kvasi-likevekt, $E_{fc} \neq E_{fv}$, som for eksempel kan genereneres i en forspent pn-overgang i en halvlederlaser, kan emisjon av fotoner være mer sannsynlig enn absorpsjon. E_{fc}= Fermienergien for ledningsbåndet i kvasi-likevekt, og E_{fv}= Fermienergien for valensbåndet i kvasi-likevekt. Bruk dette til å vise at forsterkningsbåndbredden til en halvlederlaser er gitt av:

$$E_g < h\nu < E_{fc} - E_{fv}$$

der h = Plancks konstant og E_g=båndgapet i halvlederen.

d) Diskuter kort fordelene ved å benytte heterostrukturer for å lage halvlederlasere. Hvilke lasermoder og hvilken vinkelfordeling av laserstrålen får en i dette tilfellet. Begrunn kort svaret.

Oppgitt: Lyshastigheten i vakuum $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

VEDLEGG

Oppgitte formler:
(Alle formlene trengs nødvendigvis ikke for å løse oppgavene)

Elektrisk forskyvningsvektor: $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ der ε = dielektrisitetskonstanten
Polarsasjonen: $\mathbf{P} = nq\mathbf{r}$ der n = antall ladninger q pr. volumenhet

Kompleks brytningsindeks: $N = n + i\kappa$

Relasjon mellom dielektrisitetskonstanten $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ og kompleks brytningsindeks:

$$\varepsilon_1 = n^2 - \kappa^2$$
$$\varepsilon_2 = 2n\kappa$$

Energi som funksjon av bølgevektor for energibånd med parabolsk form:

$$E(k) = E_0 \pm \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Snells brytningslov: $n_0 \sin\phi_0 = n_T \sin\phi_T$

Brytningsindeks som funksjon av vinkel θ i forhold til optisk akse for den ekstraordinære bølgen i en uniaksial krystall:

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2}$$

Reflektivitet for p- og s-polarisert lys for en overflate når innfallsvinkelen er ϕ_0:

$$r_p = \frac{n_0\cos\phi_T - n_T\cos\phi_0}{n_0\cos\phi_T + n_T\cos\phi_0}$$

$$r_s = \frac{n_0\cos\phi_0 - n_T\cos\phi_T}{n_0\cos\phi_0 + n_T\cos\phi_T}$$

Rotasjonsmatrisen: $\overline{\overline{R}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Jones matrise for polarisator som danner vinkelen α med x-aksen:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

Transformasjon av en Jones matrise:

$$\overline{\overline{T}}_{transf} = \overline{\overline{R}}(\alpha)\ \overline{\overline{T}}\ \overline{\overline{R}}(-\alpha)$$

Komponentene av Stokesvektoren:

$$S_0 = \langle E_x^2(t) \rangle + \langle E_y^2(t) \rangle$$
$$S_1 = \langle E_x^2(t) \rangle - \langle E_y^2(t) \rangle$$
$$S_2 = 2 \langle E_x(t) E_y(t) \cos[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle$$
$$S_3 = 2 \langle E_x(t) E_y(t) \sin[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle$$

Polarisasjonsgrad for delvis polarisert bølge:

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$

Transfermatrise for en film med tykkelse d ved normalt innfall:

$$\overline{\overline{M}}_i = \begin{bmatrix} \cos k_i d & -\frac{i}{n_i}\sin k_i d \\ -i n_i \sin k_i d & \cos k_i d \end{bmatrix}$$

For en matrise av formen:

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

er reflektiviteten r ved normalt innfall:

$$r = \frac{A n_0 + B n_0 n_T - C - D n_T}{A n_0 + B n_0 n_T + C + D n_T}$$

Båndbredden til et høyreflektansbelegg:

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right] = \pm\frac{n_a - n_b}{n_a + n_b}$$

Transmittansen til et Fabry Perot interferometer:

$$T = \frac{1}{1 + F\sin^2\delta}$$

der transmisjonsmaksima er gitt av betingelsen: $\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\ n = m\pi$ med n = brytningsindeksen

og finessen $$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

Halvverdibredden til transmisjonslinjen til et Fabry Perot interferometer:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{m\mathcal{F}}{\pi}$$

Kompleks amplitude til en Gaussisk stråle:

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

med

$$W(z) = W_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}$$

Resonansfrekvenser i en sfærisk-speil-resonator:

$$\nu_{\ell,m,q} = q\nu_F + (\ell + m + 1)\frac{\Delta\zeta}{\pi}\nu_F$$

$$\nu_F = c/2d$$

Forsterkningskoeffisienten for et lasermedium som har forbredningsmekanisme som gir Lorentz linjeform:

$$\gamma(\nu) = \gamma(\nu_0)\frac{(\Delta\nu/2)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2}$$

Totalt tap α_r pr. lengdeenhet i laserkavitet med lengde d:

$$\alpha_r = \alpha_s + \frac{1}{2d}\ln\frac{1}{R_1 R_2}$$

der α_s er tap i lasermediet og R_1 og R_2 er reflektansen til hhv. speil 1 og speil 2.

Refleksjonsvinkelen, $\theta_m = 90^o - \theta_{innfall,m}$ for mode m i en bølgeleder

$$\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{2d} \qquad m = 1, 2, ...$$

Matematiske relasjoner:

$$\int g(x)\delta[f(x)]\,dx = \frac{g(x_0)}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}} \qquad \text{med } f(x_0) = 0$$