NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 73593647

Eksamen i TFY4205 Kvantemekanikk
12. august 2004
9:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

Sensur faller 19. august 2004

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1. To-dimensjonal elektron-gass

Vi ser på et to-dimensjonalt elektron-system i x-y planet med et magnet-felt langs z-aksen. Hamilton-operatoren er

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[(\hat{p}_x - qA_x)^2 + (\hat{p}_y - qA_y)^2\right] , \tag{1}$$

der $\hat{p}_x$ og $\hat{p}_y$ er impuls-operatorer langs x- og y-retningen og magnet-feltet er gitt ved $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Vi bruker en sirkulær justering, slik at

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(-yB, xB, 0) . \tag{2}$$

a) Vi velger sirkulære koordinater slik at $x = r\cos\varphi$ og $y = r\sin\varphi$. Vis at Schrødinger ligningen kan skrives som

$$\hat{H}(r,\varphi)\psi(r,\varphi) = E\psi(r,\varphi) , \tag{3}$$

der

$$\hat{H}(r,\varphi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{ir}{2l_B^2}\right)^2\right] \tag{4}$$

og $l_B = \sqrt{\hbar/(qB)}$ er den magnetiske lengden.

b) Vi antar at vi kan skrive $\psi(r,\varphi) = \chi(r)\exp(il\varphi)$. Hvilke betingelser vil det være for kvante-tallet l ?

c) Vi innfører den dimensjonsløse radien x, slik at $r = l_B x$, og den dimensjonsløse energien $\epsilon = 2E/(\hbar\omega_c)$, der $\omega_c = eB/m$ er syklotron-frekvensen. Vi antar videre at $\chi(x) = P(x)\exp(-x^2/4)$. Hvordan ser differensial-ligningen som bestemmer $P(x)$ ut?

Oppgave 2. Fullstendighetsrelasjoner

a) Redegjør for hvordan en vilkårlig tilstand $|\psi\rangle$ kan utvikles i et sett egenfunksjoner $|k\rangle$.

b) Benytt fullstendighetsrelasjonen for egenfunksjoner til å vise at

$$\langle s \left| \hat{x}^2 \right| s\rangle = \sum_k \left| \langle k \left| \hat{x} \right| s\rangle \right|^2 ,$$

der sett $|s\rangle$ er en egenfunksjon for systemet.

c) Bevis kommutator-relasjonen $[\hat{p}_x^n, x] = -i\hbar n \hat{p}_x^{n-1}$ og regn ut kommutatoren $\left[\left[\hat{x}, \hat{H}^0\right], \hat{x}\right]$ med $\hat{H}^0 = \hat{p}^2/2m + V(\vec{r})$.

d) Benytt identiteten $\left[\left[\hat{x}, \hat{H}^0\right], \hat{x}\right] = 2\hat{x}\hat{H}^0\hat{x} - \hat{H}^0\hat{x}^2 - \hat{x}^2\hat{H}^0$ til å bevise summeformelen

$$\frac{2m}{\hbar^2} \sum_k (E_k - E_s) \left| x_{ks} \right|^2 = 1,$$

der $x_{ks} = \langle k \left| \hat{x} \right| s\rangle$ og $|k\rangle$ og $|s\rangle$ er egenfunksjoner for $\hat{H}^0$ med tilhørende egenverdier E_k og E_s.

Oppgave 3. Tidsavhengig perturbasjonsteori

a) Et system med en tidsuavhengig Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ og egenfunksjoner

$$\Psi_n^0(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r}) \exp\left(-i\frac{E_n t}{\hbar}\right)$$

utsettes fra tiden t_0 for en tidsavhengig perturbasjon $V(\vec{r}, t)$ slik at den totale Hamiltonoperatoren blir $\hat{H} = \hat{H}_0 + V$. Utvikle den eksakte bølgefunksjon $\Psi_n(\vec{r}, t)$ i egenfunksjonene for det uperturberte system

$$\Psi_n(\vec{r}, t) = \sum_k a_k(t) \Psi_k^0(\vec{r}, t)$$

og vis at for svake perturbasjoner gjelder til laveste orden

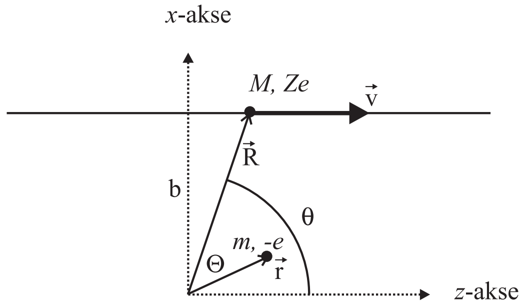
$$a_k(t) = a_k(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \sum_m a_m(t_0) \int_{t_0}^{t} d\tau V_{km}(\tau) \exp\left(i\tau\frac{E_k - E_m}{\hbar}\right) ,$$

der

$$V_{km}(\tau) = \int d^3r \psi_k^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_m(\vec{r})$$

Hvilken betydning har $|a_k(t)|^2$?

b) Et H-atom eksiteres ved at en ladet partikkel (ladning Ze) farer forbi. Partikkelen har så stor masse M og hastighet v at den kan regnes å gå rettlinjet med konstant hastighet.



og med minste avstand b til atomsenteret. Vis at sannsynligheten for at elektronet (ladning $-e$ og masse m) i H-atomet, som opprinnelig er i grunntilstanden ψ_s, skal eksiteres til en tilstand ψ_k er $|a_k|^2$ med

$$a_k = -\frac{2iZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar bv}x_{ks}$$

der

$$x_{ks} = \int d^3r\psi_k^*\left(\vec{r}\right)x\psi_m\left(\vec{r}\right)$$

når en kan anta at

- vekselvirkningen mellom partikkelen og elektronet er ren Coulomb-vekselvirkning
- avstanden b er så stor at i multipolutviklingen

$$\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l\left(\cos\theta\right)$$

  når $R \geqq r$ trenger en bare ta hensyn til dipol-leddet ($l=1$) med $rP_1\left(\cos\theta\right) = \vec{r}\cdot\hat{R}$ (Her er $P_1\left(\cos\theta\right) = \cos\theta$ og $\hat{R} = \vec{R}/R = \sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_z$).
  Hvorfor gir ikke monopolleddet $l=0$ noe bidrag til eksitasjonen?
- den tiden partikkelen er nær atomet er så kort i forhold til atomperioden $\hbar/\left(E_k - E_s\right)$ at en kan sette $\exp\left(i\tau\frac{E_k-E_m}{\hbar}\right) \approx 1$ i integralet. (Det kan lønne seg å innføre θ som integrasjonsvariabel istedenfor t og benytte at $R^2d\theta/dt = bv$).

c) Ved eksitasjon til en tilstand ψ_k må partikkelen gi fra seg energien $E_k - E_s$ til elektronet. Hvor stort blir partikkelens midlere energitap? Benytt summeformelen i oppgave 2d) til å finne dette energitapet uttrykt ved partikkelens ladningstall Z, hastighet v og støtparameter b.