NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 73593647

Eksamen i TFY4205 Kvantemekanikk
Torsdag 9. juni 2005
9:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

Sensur faller før 30. juni.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1. Grunnleggende kvantemekanikk

a) Kommutatoren mellom impuls-operatoren $\hat{p}_x$ og posisjons-operatoren $\hat{x}$ er

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i}\,. \tag{1}$$

Skriv opp Heisenbergs uskarphetsrelasjon (usikkerhetsrelasjon) for impuls og posisjon i én dimensjon. Definér symbolene Δx og Δp_x som inngår, presist. Forklar også kort hva uskarphetsrelasjonen gir uttrykk for.

b) Gi et eksempel på en bølgefunksjon som har $\Delta p_x = 0$. Hva er Δx for denne bølgefunksjonen? Angi en operator som har denne bølgefunksjonen som egenfunksjon.

c) For to hermiteske operatorer som har kommutatoren

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\hat{K}$$

gjelder det

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}|\langle\hat{K}\rangle|\,, \tag{2}$$

der $\langle\hat{K}\rangle$ er forventningsverdien av operatoren $\hat{K}$ i en bestemt kvantemekanisk tilstand. Skriv opp definisjonene av ΔQ og ΔP. Gjør dernest rede for hvordan uskarphetsrelasjonen i pkt. a) framkommer som et spesialtilfelle av det vi her har oppgitt. Vis også at for en fri partikkel med energi E og masse m så gjelder:

$$\Delta E \cdot \Delta x \geq \hbar\frac{|\langle\hat{p}_x\rangle|}{2m}\,.$$

d) La A og B være to vilkårlige hermiteske operatorer som oppfyller

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0\,.$$

Finnes det da tilstander der både $\Delta A = 0$ og $\Delta B = 0$? Begrunn svaret.

Oppgave 2. Kvante-statistikk

Vi ser på to partikler som befinner seg i en én-dimensjonal boks med bredde a, der potensialet er

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } -a/2 \le x \le a/2 \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases} \tag{3}$$

Vi antar at én av partiklene befinner seg i grunntilstanden beskrevet ved bølgefunksjonen

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) & \text{når } -a/2 \le x \le a/2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \tag{4}$$

og egenenergien

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2. \tag{5}$$

Den andre partikkelen befinner seg i den første eksiterte tilstanden beskrevet ved bølgefunksjonen

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) & \text{når } -a/2 \le x \le a/2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \tag{6}$$

og egenenergien

$$E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2. \tag{7}$$

I denne oppgaven kan du få bruk for følgende integral:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du\; u^2 \cos^2 u \;=\; \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{6}\pi^2 - 1\right). \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} du\; u^2 \sin^2 u \;=\; \pi\left(\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\right), \tag{9}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du\; u \cos u \sin 2u \;=\; \frac{8}{9}. \tag{10}$$

a) Vi ser først på tilfellet der partiklene er spinnløse. Bestem midlere avstand $r_{12} = \langle(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2\rangle^{1/2}$ mellom partiklene, der $\hat{x}_1$ er posisjons-operatoren til partikkel 1 og $\hat{x}_2$ er posisjons-operatoren til partikkel 2, når

1. Partiklene er ulike.
2. Partiklene er identiske fermioner.
3. Partiklene er identiske bosoner.

Kommentér resultatet.

b) Vi antar nå at de to partiklene begge er elektroner. Vi antar at spinn-egenfunksjonene til det første og det andre elektronet er gitt ved henholdsvis $\chi_\pm(1)$ og $\chi_\pm(2)$, der '+' svarer til en spinn opp tilstand og '-' svarer til en spinn ned tilstand. Hvilke egenverdier for total-spinn, S, og total-spinn langs z-aksen, S_z, er mulige? Hva er to-partikkel spinn-egenfunksjonene med disse S- og S_z-egenverdiene?

Oppgave 3. Spredning

Du kan i denne oppgaven få bruk for følgende relasjoner:

$$\int x \sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax) + C\,. \tag{11}$$

$$\int x \sin(bx)\exp(-cx^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}bc^{-3/2}\exp(-b^2/4c)\,, c > 0 \tag{12}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\,, \tag{13}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\,, \tag{14}$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\,. \tag{15}$$

a) Gi en fysikalsk definisjon av det differensielle spredningstverrsnitt, $d\sigma/d\Omega$.

I resten av oppgaven skal vi betrakte kvantemekanisk spredning som et stasjonært problem. Vi ser på spredning av partikler med masse m på et potensial $V(\vec{r})$. Innkommende bølge er gitt ved $\psi_{\text{inn}} = \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$. Det antas at $V(\vec{r})$ avtar raskt nok til at den spredte bølge for tilstrekkelig store $r = |\vec{r}|$ kan uttrykkes ved:

$$\psi_{\text{spredt}} = \psi(\vec{r}) - \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \approx f(\theta,\phi)\frac{\exp(ikr)}{r}\,, \tag{16}$$

der

$$f(\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\exp(-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \tag{17}$$

kalles spredningamplituden, $\psi(\vec{r})$ er den totale bølgefunksjonen for problemet, $k = |\vec{k}|$, $\vec{k}_f = k\vec{r}/r$ og $U(\vec{r}) = 2mV(\vec{r})/\hbar^2$.

b) Hva er spredningsamplituden $f^B(\theta,\phi)$ i første Born-approksimasjon for et generelt potensial $V(\vec{r})$? Vis (på grunnlag av ovenstående) at for et sentralsymmetrisk potensial ($V(\vec{r}) = V(r)$) så kan spredningsamplituden i første Born-approksimasjon uttrykkes ved:

$$f^B(\theta) = f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr r \sin(qr)V(r)\,, \tag{18}$$

der $q = |\vec{q}|$ og $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}$.

I hele resten av oppgaven antar vi at situasjonen er slik at første Born-approksimasjon kan nyttes.

c) Beregn $f^B(q)$ og $d\sigma^B/d\Omega$ for partikler med masse m og energi $E = \hbar^2 k^2/2m$ som spres på potensialet:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{for} \quad r \leq a\,, \\ 0 & \text{for} \quad r > a\,. \end{cases} \tag{19}$$

Det kan benyttes som kjent at

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = |f^B(q)|^2\,. \tag{20}$$

d) Beregn også $f^B(q)$ og $d\sigma^B/d\Omega$ for samme situasjon som i pkt. c), men med potensialet

$$V(r) = V_0 \exp\,(-\frac{r^2}{2(\xi a)^2})\,, \tag{21}$$

der

$$\xi = (\frac{2}{9\pi})^{1/6}\,. \tag{22}$$

Dersom en måler spredning for slike q at $qa \ll 1$, kan en da ut fra spredningseksperimentene skille mellom potensialene gitt i dette punkt og det gitt i pkt. c)? Begrunn svaret.