NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 73 59 36 53, mobil 90 07 51 72

Eksamen i fag TFY4205 Kvantemekanikk II
Onsdag 8. desember 2010
Tid: 9.00–13.00

Sensurfrist: Onsdag 29. desember 2010

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske og fysiske tabeller.

En tabell over fysiske konstanter finnes sist i dette oppgavesettet.
Alle deloppgaver teller likt ved sensuren.

Oppgave 1:

En elektromagnetisk planbølge har bølgetall k ($k > 0$) og vinkelfrekvens $\omega = ck$ og beveger seg i positiv z-retning. Bølgen beskrives av et klassisk vektorpotensial som er en lineærkombinasjon

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^{4} c_j \vec{A}_j \tag{1}$$

med konstante reelle koeffisienter c_1, c_2, c_3, c_4 av fire spesielle løsninger av Maxwells ligninger,

$$\begin{aligned} \vec{A}_1(\vec{r},t) &= \vec{\mathrm{e}}_x\, K \cos(kz - \omega t)\ , \qquad & \vec{A}_2(\vec{r},t) &= \vec{\mathrm{e}}_x\, K \sin(kz - \omega t)\ , \\ \vec{A}_3(\vec{r},t) &= \vec{\mathrm{e}}_y\, K \cos(kz - \omega t)\ , \qquad & \vec{A}_4(\vec{r},t) &= \vec{\mathrm{e}}_y\, K \sin(kz - \omega t)\ . \end{aligned}$$

Polarisasjonsvektorene $\vec{\mathrm{e}}_x$ og $\vec{\mathrm{e}}_y$ er enhetsvektorer i x- og y-retning, mens K er en konstant som avhenger av et normeringsvolum $\mathcal{V}$,

$$K = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \mathcal{V} \omega}}\ .$$

Ligning (1) kan omskrives slik:

$$\vec{A} = K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + (\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x^* + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y^*)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big]\ , \tag{2}$$

med komplekse koeffisienter

$$a_x = \frac{c_1 - \mathrm{i}c_2}{2}\ , \qquad a_y = \frac{c_3 - \mathrm{i}c_4}{2}\ .$$

Det elektriske feltet $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$ og den magnetiske flukstettheten $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ er

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \mathrm{i}\omega K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} - (\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x^* + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y^*)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big]\,,\\ \vec{B} &= \mathrm{i}kK\Big[(\vec{\mathrm{e}}_y\, a_x - \vec{\mathrm{e}}_x\, a_y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + (\vec{\mathrm{e}}_y\, a_x^* - \vec{\mathrm{e}}_x\, a_y^*)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big]\,.\end{aligned}$$

Ligningene (1) og (2) kan videre omskrives slik:

$$\vec{A} = K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_+\, a_+ + \vec{\mathrm{e}}_-\, a_-)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + (\vec{\mathrm{e}}_+^{\,*}\, a_+^* + \vec{\mathrm{e}}_-^{\,*}\, a_-^*)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big] \tag{3}$$

når vi definerer

$$\vec{\mathrm{e}}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{\mathrm{e}}_x \mp \mathrm{i}\,\vec{\mathrm{e}}_y)\;, \qquad a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x \pm \mathrm{i}a_y)\;. \tag{4}$$

a) For å gi en fysisk tolkning av koeffisientene a_x, a_y, a_+ og a_- ser vi på det elektriske feltet $\vec{E}$. Her tar vi for oss to eksempler.

Anta at $a_y = 0$, $a_x \neq 0$, og gjør rede for hvordan $\vec{E}$ varierer med z ved konstant t, og varierer med t ved konstant z. Vi sier at denne bølgen er horisontalt lineært polarisert.

Anta at $a_- = 0$, $a_+ \neq 0$, og gjør rede for hvordan $\vec{E}$ varierer.
Vi sier at denne bølgen er høyredreiende sirkulært polarisert.

Tegn gjerne figurer.

Når vi kvantiserer i Schrödingerbildet, blir $\vec{A}(\vec{r}, t)$ en tidsuavhengig Hermitesk operator,

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + (\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x^\dagger + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y^\dagger)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\Big]\\ &= K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_+\, a_+ + \vec{\mathrm{e}}_-\, a_-)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + (\vec{\mathrm{e}}_+^{\,*}\, a_+^\dagger + \vec{\mathrm{e}}_-^{\,*}\, a_-^\dagger)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\Big]\,,\end{aligned}$$

mens tidsavhengigheten er i tilstandsvektoren $|\psi(t)\rangle$, som oppfyller Schrödinger-ligningen

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle \qquad \text{med} \qquad H = \hbar\omega\,(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)\;.$$

Etter kvantiseringen gjelder fremdeles ligning (4).

Annihilasjons- og kreasjonsoperatorene $a_x, a_y, a_x^\dagger, a_y^\dagger$ oppfyller kommutasjonsrelasjonene

$$[a_x, a_x^\dagger] = [a_y, a_y^\dagger] = 1\;.$$

Alle andre kommutatorer mellom dem er null.

b) Vis kommutasjonsrelasjonene

$$[a_+, a_+^\dagger] = 1\;, \qquad [a_+, a_-^\dagger] = 0\;.$$

Vis også at

$$H = \hbar\omega\,(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1)\;.$$

c) Vakuum-tilstanden $|0\rangle$ annihileres av operatorene a_x, a_y og $a_\pm$.

Tilstandene

$$|h\rangle = a_x^\dagger\,|0\rangle \qquad \text{og} \qquad |v\rangle = a_y^\dagger\,|0\rangle$$

inneholder begge ett foton med kvantisert impuls $\vec{p} = \hbar k\vec{e}_z$. Fotonet er horisontalt polarisert i tilstanden $|h\rangle$ og vertikalt polarisert i tilstanden $|v\rangle$.

Hvilken polarisasjon har fotonet i hver av de to tilstandene

$$|+\rangle = a_+^\dagger\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle - \mathrm{i}\,|v\rangle)\ , \qquad |-\rangle = a_-^\dagger\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle + \mathrm{i}\,|v\rangle)\ ?$$

Hvilken polarisasjon har fotonet i tilstandene

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle + |v\rangle)\ , \qquad |g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle - |v\rangle)\ ?$$

Begrunn svarene.

d) En kan for eksempel bruke en dobbeltbrytende krystall til å skille fotoner med horisontal og vertikal lineær polarisasjon.

Hva er sannsynligheten for å observere at fotonet er horisontalt polarisert, og hva er sannsynligheten for å observere at det er vertikalt polarisert, i hver av tilstandene $|+\rangle$, $|-\rangle$, $|f\rangle$ og $|g\rangle$?

e) Vis at følgende to-fotontilstander er normerte,

$$|hh\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x^\dagger)^2\,|0\rangle\ , \qquad |hv\rangle = a_x^\dagger a_y^\dagger\,|0\rangle\ , \qquad |vv\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_y^\dagger)^2\,|0\rangle\ .$$

I to-fotontilstanden

$$|+-\rangle = a_+^\dagger a_-^\dagger\,|0\rangle$$

har begge fotonene samme impuls $\vec{p} = \hbar k\vec{e}_z$ og er sirkulært polarisert, men med motsatt polarisasjon.

Uttrykk denne tilstanden som en superposisjon av tilstandene $|hh\rangle$, $|hv\rangle$ og $|vv\rangle$.

Hva er sannsynlighetene, i tilstanden $|+-\rangle$, for å observere at begge fotonene er horisontalt polarisert, at begge er vertikalt polarisert, eller at det ene er horisontalt og det andre vertikalt polarisert?

Sammenlign dette eksperimentet, der vi måler på en to-fotontilstand, med et annet eksperiment, der vi måler på to en-fotontilstander, først med fotonet i tilstanden $|+\rangle$ og etterpå med fotonet i tilstanden $|-\rangle$. Kommentar?

f) En en-fotontilstand har to mulige polarisasjonstilstander.

Vi har sett at en to-fotontilstand, der begge fotonene har samme impuls, har tre mulige polarisasjonstilstander.

Hvor mange mulige polarisasjonstilstander har en 100-fotontilstand, der alle de 100 fotonene har samme impuls? Begrunn svaret.

g) Ta som eksempel et foton som sendes ut ved en overgang fra første eksiterte nivå til grunntilstanden i et hydrogenatom. Bølgefunksjonen i grunntilstanden er

$$\psi_f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}} \qquad \text{med} \qquad a = \left(1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\right) a_0 \ .$$

a_0 er Bohr-radien til hydrogen, m_e er elektronmassen og m_p er protonmassen.

Anta at den eksiterte tilstanden har kvantetall $\ell = 1$ for banedreieimpulsen og $m = 1$ for z-komponenten av banedreieimpulsen, bølgefunksjonen er da

$$\psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{8\sqrt{\pi a^5}}\, r\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}\,\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \frac{1}{8\sqrt{\pi a^5}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}\,(x + \mathrm{i}y) \ .$$

Overgangssannsynligheten er proporsjonal med $|(\vec{e}^{\,*})\cdot\vec{r}_{fi}|^2$ der $\vec{e}$ er polarisasjonsvektoren til fotonet (som kan tenkes å være kompleks), og

$$\vec{r}_{fi} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\;(\psi_f(\vec{r}))^*\,\vec{r}\;\psi_i(\vec{r}) \ .$$

Vis at

$$\vec{r}_{fi} = C\,(\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i}\,\vec{\mathrm{e}}_y)$$

der C er en konstant. Beregn C.

Hva er polarisasjonen til fotonet dersom det sendes ut i (x, y)-planet?

(Det er kanskje enklere å svare hvis spørsmålet stilles motsatt: hvilken polarisasjon kan fotonet *ikke* ha?)

Hva er polarisasjonen til fotonet dersom det sendes ut i positiv z-retning?

I det siste tilfellet, når fotonet sendes ut i positiv z-retning, kan en finne polarisasjonen uten å regne, bare ved å bruke at z-komponenten av dreieimpulsen er bevart.
Forklar hvordan.

Oppgave 2:

En ikke-relativistisk partikkel med masse m og energi

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

spres mot et potensial $V(\vec{r})$. Første ordens Born-tilnærming gir spredningsamplituden $f = f^B$ som en funksjon av impulsoverføringen $\hbar\vec{q}$ fra potensialet til partikkelen,

$$f^B(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\;V(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{r}} \ .$$

Spredningsvinkelen θ er gitt ved at

$$q = |\vec{q}| = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) .$$

a) Anta at potensialet er kulesymmetrisk, $V(\vec{r}) = V(r)$, og vis at da er

$$f^B(\vec{q}) = f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty \mathrm{d}r\; V(r)\; r\; \sin(qr) \; .$$

b) Når er partialbølgeutviklingen

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\ell} \sin\delta_\ell \; P_\ell(\cos\theta) \tag{5}$$

gyldig?

Når er det en god tilnærming å bruke partialbølgeutviklingen med bare noen få ledd i summen?

Når er første ordens Born-tilnærming bedre?

Begrunn svarene (kort).

c) Bruk partialbølgeutviklingen i ligning (5) til å utlede det optiske teoremet.

Du vil få bruk for ortogonalitetsrelasjonen for Legendre-polynomene (se nedenfor).

Er første ordens Born-tilnærming konsistent med det optiske teoremet?

Noen fysiske konstanter og formler

Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Permeabiliteten i vakuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
Permittiviteten i vakuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Den reduserte Plancks konstant:	$\hbar = h/(2\pi) = 1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Elementærladningen:	$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Finstrukturkonstanten:	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137{,}036$
Elektronmassen:	$m_\mathrm{e} = 9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0,511\,\mathrm{MeV}/c^2$
Protonmassen:	$m_\mathrm{p} = 1{,}6726 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938,28\,\mathrm{MeV}/c^2$
Nøytronmassen:	$m_\mathrm{n} = 1{,}6749 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939,57\,\mathrm{MeV}/c^2$
Atommasseenheten:	$\mathrm{u} = 1{,}660\,54 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931,46\,\mathrm{MeV}/c^2$
Bohr-radien for hydrogen:	$a_0 = \hbar/(\alpha m_\mathrm{e} c) = 0{,}529\,\mathrm{Å}$

Ortogonalitetsrelasjon for Legendre-polynomene:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x) = \frac{2\,\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1} \; .$$

Sammenheng mellom differensielt spredningstverrsnitt og spredningsamplitude:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f|^2 \; .$$

THE NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS

Contact person:
Name: Jan Myrheim
Telephone: 73 59 36 53, mobile 90 07 51 72

Examination, course TFY4205 Quantum Mechanics II
Wednesday December 8, 2010
Time: 9.00–13.00

Grades made public: Wednesday December 29, 2010

Allowed to use: Calculator, mathematical and physical tables.

A table of physical constants can be found at the end of this problem set.
All subproblems are given the same weight in the grading.

Problem 1:

An electromagnetic plane wave has wave number k ($k > 0$) and angular frequency $\omega = ck$ and moves in the positive z direction.
The wave is described by a classical vector potential which is a linear combination

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^{4} c_j \vec{A}_j \tag{1}$$

with constant real coefficients c_1, c_2, c_3, c_4 of four special solutions of Maxwell's equations,

$$\begin{aligned} \vec{A}_1(\vec{r},t) &= \vec{e}_x\, K \cos(kz - \omega t)\ , \qquad & \vec{A}_2(\vec{r},t) &= \vec{e}_x\, K \sin(kz - \omega t)\ , \\ \vec{A}_3(\vec{r},t) &= \vec{e}_y\, K \cos(kz - \omega t)\ , \qquad & \vec{A}_4(\vec{r},t) &= \vec{e}_y\, K \sin(kz - \omega t)\ . \end{aligned}$$

The polarization vectors $\vec{e}_x$ and $\vec{e}_y$ are unit vectors in the x and y directions, while K is a constant depending on a normalization volume $\mathcal{V}$,

$$K = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \mathcal{V} \omega}}\ .$$

The equation (1) may be rewritten as follows,

$$\vec{A} = K\Big[(\vec{e}_x\, a_x + \vec{e}_y\, a_y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + (\vec{e}_x\, a_x^* + \vec{e}_y\, a_y^*)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big]\ , \tag{2}$$

with complex coefficients

$$a_x = \frac{c_1 - \mathrm{i}c_2}{2}\ , \qquad a_y = \frac{c_3 - \mathrm{i}c_4}{2}\ .$$

The electrical field $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$ and the magnetic flux density $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ are

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \mathrm{i}\omega K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} - (\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x^* + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y^*)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big]\,,\\ \vec{B} &= \mathrm{i}kK\Big[(\vec{\mathrm{e}}_y\, a_x - \vec{\mathrm{e}}_x\, a_y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + (\vec{\mathrm{e}}_y\, a_x^* - \vec{\mathrm{e}}_x\, a_y^*)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big]\,.\end{aligned}$$

The equations (1) and (2) may be rewritten further as follows,

$$\vec{A} = K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_+\, a_+ + \vec{\mathrm{e}}_-\, a_-)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + (\vec{\mathrm{e}}_+^*\, a_+^* + \vec{\mathrm{e}}_-^*\, a_-^*)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big] \qquad (3)$$

when we define

$$\vec{\mathrm{e}}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{\mathrm{e}}_x \mp \mathrm{i}\,\vec{\mathrm{e}}_y)\,, \qquad a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x \pm \mathrm{i}a_y)\,. \qquad (4)$$

a) In order to give a physical interpretation of the coefficients a_x, a_y, a_+ and a_- we look at the electrical field $\vec{E}$. Here we consider two examples.

Assume that $a_y = 0$, $a_x \neq 0$, and discuss how $\vec{E}$ varies with z at constant t, and varies with t at constant z. We say that this wave is horizontally linearly polarized.

Assume that $a_- = 0$, $a_+ \neq 0$, and discuss how $\vec{E}$ varies.
We say that this wave is right circularly polarized.

Drawing figures may be useful.

When we quantize in the Schrödinger picture $\vec{A}(\vec{r},t)$ becomes a time independent Hermitean operator,

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + (\vec{\mathrm{e}}_x\, a_x^\dagger + \vec{\mathrm{e}}_y\, a_y^\dagger)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\Big]\\ &= K\Big[(\vec{\mathrm{e}}_+\, a_+ + \vec{\mathrm{e}}_-\, a_-)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + (\vec{\mathrm{e}}_+^*\, a_+^\dagger + \vec{\mathrm{e}}_-^*\, a_-^\dagger)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\Big]\,,\end{aligned}$$

whereas the time dependence is in the state vector $|\psi(t)\rangle$, which obeys the Schrödinger equation

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle \qquad \text{with} \qquad H = \hbar\omega\,(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)\,.$$

After quantization equation (4) still holds.

The annihilation and creation operators $a_x, a_y, a_x^\dagger, a_y^\dagger$ obey the commutation relations

$$[a_x, a_x^\dagger] = [a_y, a_y^\dagger] = 1\,.$$

All other commutators between them vanish.

b) Prove the commutation relations

$$[a_+, a_+^\dagger] = 1\,, \qquad [a_+, a_-^\dagger] = 0\,.$$

Also prove that

$$H = \hbar\omega\,(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1)\,.$$

c) The vacuum state $|0\rangle$ is annihilated by the operators a_x, a_y and $a_\pm$.

The states

$$|h\rangle = a_x^\dagger\,|0\rangle \qquad \text{and} \qquad |v\rangle = a_y^\dagger\,|0\rangle$$

both contain one photon with the quantized momentum $\vec{p} = \hbar k \vec{e}_z$. The photon is horizontally polarized in the state $|h\rangle$ and vertically polarized in the state $|v\rangle$.

What is the polarization of the photon in each of the two states

$$|+\rangle = a_+^\dagger\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle - \mathrm{i}\,|v\rangle)\;, \qquad |-\rangle = a_-^\dagger\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle + \mathrm{i}\,|v\rangle)\;?$$

What is the polarization of the photon in the states

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle + |v\rangle)\;, \qquad |g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle - |v\rangle)\;?$$

Explain your reasoning.

d) We may for example use a birefringent crystal to separate photons with horizontal and vertical linear polarization.

What is the probability to observe that the photon is horizontally polarized, and what is the probability to observe that it is vertically polarized, in each of the states $|+\rangle$, $|-\rangle$, $|f\rangle$ and $|g\rangle$?

e) Show that the following two-photon states are normalized,

$$|hh\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x^\dagger)^2\,|0\rangle\;, \qquad |hv\rangle = a_x^\dagger a_y^\dagger\,|0\rangle\;, \qquad |vv\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_y^\dagger)^2\,|0\rangle\;.$$

In the two-photon state

$$|+-\rangle = a_+^\dagger a_-^\dagger\,|0\rangle$$

both photons have the same momentum $\vec{p} = \hbar k \vec{e}_z$ and are circularly polarized, but with opposite polarizations.

Express this state as a superposition of the states $|hh\rangle$, $|hv\rangle$ and $|vv\rangle$.

What are the probabilities, in the state $|+-\rangle$, to observe that both photons are horizontally polarized, that both are vertically polarized, or that one is horizontally and the other one vertically polarized?

Compare this experiment, where we measure on a two-photon state, with another experiment, where we measure on two one-photon states, first with the photon in the state $|+\rangle$ and afterwards with the photon in the state $|-\rangle$. Comments?

f) A one-photon state has two possible polarization states.

We have seen that a two-photon state, where both photons have the same momentum, has three possible polarization states.

How many possible polarization states has a 100-photon state, where all the 100 photons have the same momentum? Explain your reasoning.

g) Take as an example a photon emitted in a transition from the first excited level to the ground state in a hydrogen atom. The wave function in the ground state is

$$\psi_f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}} \qquad \text{with} \qquad a = \left(1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\right) a_0 \ .$$

a_0 is the Bohr radius of hydrogen, m_e is the electron mass and m_p is the proton mass.

Assume that the excited state has quantum numbers $\ell = 1$ for the orbital angular momentum and $m = 1$ for the z component of the orbital angular momentum. The wave function is then

$$\psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{8\sqrt{\pi a^5}}\, r\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}\,\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \frac{1}{8\sqrt{\pi a^5}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}\,(x + \mathrm{i}y) \ .$$

The transition probability is proportional to $|(\vec{e}^{\,*})\cdot\vec{r}_{fi}|^2$ where $\vec{e}$ is the polarization vector of the photon (which might be complex), and

$$\vec{r}_{fi} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,(\psi_f(\vec{r}))^*\,\vec{r}\,\psi_i(\vec{r}) \ .$$

Show that

$$\vec{r}_{fi} = C\,(\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i}\,\vec{\mathrm{e}}_y)$$

where C is a constant. Compute C.

What is the polarization of the photon if it is emitted in the (x, y) plane?

(It may be simpler to answer the question if it is posed in the opposite way: which photon polarization, if any, is impossible?)

What is the polarization of the photon if it is emitted in the positive z direction?

In the last case, photon emission in the positive z direction, one may predict the photon polarizationen without computation, just by using the law of conservation of the z component of the angular momentum. Explain how.

Problem 2:

A non-relativistic particle with mass m and energy

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

is scattered by a potential $V(\vec{r})$. The first order Born approximation gives the scattering amplitude $f = f^B$ as a function of the momentum transfer $\hbar\vec{q}$ from the potential to the particle,

$$f^B(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ V(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{r}} \ .$$

The scattering angle θ is given by the relation

$$q = |\vec{q}| = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) .$$

a) Assume that the potential is spherically symmetric, $V(\vec{r}) = V(r)$, and show that then

$$f^B(\vec{q}) = f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty \mathrm{d}r\; V(r)\, r\, \sin(qr)\;.$$

b) When is the partial wave expansion

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\ell}\sin\delta_\ell\; P_\ell(\cos\theta) \tag{5}$$

valid?

When is it a good approximation to use the partial wave expansion with only few terms in the sum?

When is the first order Born approximation better?

Give (brief) reasons for your answers.

c) Use the partial wave expansion in equation (5) to derive the optical theorem.

You will need the orthogonality relation for the Legendre polynomials (see below).

Is the first order Born approximation consistent with the optical theorem?

Some physical constants and formulas

The speed of light in vacuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
The permeability of vacuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
The permittivity of vacuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
The reduced Planck's constant:	$\hbar = h/(2\pi) = 1.055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
The elementary charge:	$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
The fine structure constant:	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.036$
The electron mass:	$m_\mathrm{e} = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$
The proton mass:	$m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938.28\,\mathrm{MeV}/c^2$
The neutron mass:	$m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939.57\,\mathrm{MeV}/c^2$
The atomic mass unit:	$\mathrm{u} = 1.660\,54 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931.46\,\mathrm{MeV}/c^2$
The Bohr radius for hydrogen:	$a_0 = \hbar/(\alpha m_\mathrm{e} c) = 0.529\,\text{Å}$

The orthogonality relation for the Legendre polynomials:

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\; P_\ell(x)\,P_{\ell'}(x) = \frac{2\,\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}\;.$$

The relation between the differential scattering cross section and the scattering amplitude:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f|^2\;.$$