NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 73593647

Eksamen i TFY4205 Kvantemekanikk
Torsdag 9. juni 2005
9:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

Sensur faller før 30. juni.

Dette oppgavesettet er på 10 sider.

Oppgave 1. Grunnleggende kvantemekanikk

a) Kommutatoren mellom impuls-operatoren $\hat{p}_x$ og posisjons-operatoren $\hat{x}$ er

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i} \,. \tag{1}$$

Skriv opp Heisenbergs uskarphetsrelasjon (usikkerhetsrelasjon) for impuls og posisjon i én dimensjon. Definér symbolene Δx og Δp_x som inngår, presist. Forklar også kort hva uskarphetsrelasjonen gir uttrykk for.

LØSNING:

Heisenbergs uskarphetsrelasjon er

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2 \,.$$

Uskarpheten i posisjon og impuls er definert ved

$$\Delta x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{1/2} \,, \Delta p_x = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle^{1/2} \,.$$

Dersom $\psi(x)$ er den aktuelle bølgefunksjon, er forventningsverdien av en operator $\hat{F}$ gitt ved:

$$\langle \hat{F} \rangle = \int dx \psi^*(x) \hat{F} \psi(x) \,.$$

Uskarphetsrelasjonen gir uttrykk for at impulsen p_x og posisjonen x ikke kan være skarpt bestemt samtidig, dvs. i samme tilstand. Det minste produkt av Δp_x og Δx som noen tilstand kan ha, er $\hbar/2$.

b) Gi et eksempel på en bølgefunksjon som har $\Delta p_x = 0$. Hva er Δx for denne bølgefunksjonen? Angi en operator som har denne bølgefunksjonen som egenfunksjon.

LØSNING:

$$\psi(x) = \exp(ik_x x)\,,$$

der $k_x = p_x/\hbar$ og p_x er impulsen i x-retning har $\Delta p_x = 0$ og $\Delta x = \infty$. $\exp(ik_x x)$ er egenfunksjon for impuls-operatoren $\hat{p}_x = (\hbar/i)\partial/\partial x$.

c) For to hermiteske operatorer som har kommutatoren

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\hat{K}$$

gjelder det

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}|\langle\hat{K}\rangle|\,, \tag{2}$$

der $\langle\hat{K}\rangle$ er forventningsverdien av operatoren $\hat{K}$ i en bestemt kvantemekanisk tilstand. Skriv opp definisjonene av ΔQ og ΔP. Gjør dernest rede for hvordan uskarphetsrelasjonen i pkt. a) framkommer som et spesialtilfelle av det vi her har oppgitt. Vis også at for en fri partikkel med energi E og masse m så gjelder:

$$\Delta E \cdot \Delta x \geq \hbar\frac{|\langle\hat{p}_x\rangle|}{2m}\,.$$

LØSNING:

Uskarpheten i de fysiske størrelsene er definert ved

$$\Delta Q = \langle(\hat{Q} - \langle\hat{Q}\rangle)^2\rangle^{1/2}\,, \Delta P = \langle(\hat{P} - \langle\hat{P}\rangle)^2\rangle^{1/2}\,.$$

Fra pkt. a) har vi

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

som gir når innsatt i ligningen

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$$

q.e.d.

En fri partikkel i én dimensjon har:

$$E = \frac{p_x^2}{2m}$$

og

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}\,.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \hat{x}] &= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x[\hat{p}_x, \hat{x}] + [\hat{p}_x, \hat{x}]\hat{p}_x\right) &(3)\\
&= -i\frac{\hbar}{m}\hat{p}_x &(4)
\end{aligned}$$

som innsatt i den generelle uskarphetsrelasjonen ovenfor (2) gir

$$\Delta E \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle \hat{p}_x \rangle|$$

q.e.d.

d) La A og B være to vilkårlige hermiteske operatorer som oppfyller

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \,.$$

Finnes det da tilstander der både $\Delta A = 0$ og $\Delta B = 0$? Begrunn svaret.

LØSNING:

To operatorer som kommuterer kan ha felles egenfunksjoner. I tilstandene tilsvarende de felles egenfunksjonene vil de tilsvarende fysiske størrelsene til $\hat{A}$ og $\hat{B}$ begge være skarpt bestemt, og vi har både $\Delta A = 0$ og $\Delta B = 0$.

Oppgave 2. Kvante-statistikk

Vi ser på to partikler som befinner seg i en én-dimensjonal boks med bredde a, der potensialet er

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

Vi antar at én av partiklene befinner seg i grunntilstanden beskrevet ved bølgefunksjonen

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) & \text{når } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \tag{6}$$

og egenenergien

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} (\frac{\pi}{a})^2 \,. \tag{7}$$

Den andre partikkelen befinner seg i den første eksiterte tilstanden beskrevet ved bølgefunksjonen

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) & \text{når } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \tag{8}$$

og egenenergien

$$E_2 = \frac{\hbar^2}{2m} (\frac{2\pi}{a})^2 \,. \tag{9}$$

I denne oppgaven kan du få bruk for følgende integral:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du\; u^2 \cos^2 u \;=\; \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{6}\pi^2 - 1\right) \,. \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} du\; u^2 \sin^2 u \;=\; \pi\left(\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\right) \,, \tag{11}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du\; u \cos u \sin 2u \;=\; \frac{8}{9} \,. \tag{12}$$

a) Vi ser først på tilfellet der partiklene er spinnløse. Bestem midlere avstand $r_{12} = \langle(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2\rangle^{1/2}$ mellom partiklene, der $\hat{x}_1$ er posisjons-operatoren til partikkel 1 og $\hat{x}_2$ er posisjons-operatoren til partikkel 2, når

1. Partiklene er ulike.
2. Partiklene er identiske fermioner.
3. Partiklene er identiske bosoner.

Kommentér resultatet.

LØSNING

Midlere avstand er gitt ved

$$r_{12}^2 = \langle\hat{x}_1^2\rangle + \langle\hat{x}_2^2\rangle - 2\langle\hat{x}_1\hat{x}_2\rangle\,. \tag{13}$$

To-partikkel bølgefunksjonen er

1. $$\psi_{\mathrm{u}}(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \tag{14}$$

   når partiklene er ulike,

2. $$\psi_{\mathrm{F}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)\right] \tag{15}$$

   når partiklene er identiske fermionener og

3. $$\psi_{\mathrm{B}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)\right] \tag{16}$$

   når partiklene er identiske bosoner.

For ulike partikler har vi:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}_1^2\rangle_{\mathrm{u}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi_1(x_1)|^2 |\psi_2(x_2)|^2 x_1^2\,, && (17)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 |\psi_1(x_1)|^2 x_1^2\,, && (18)\\
&= \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx_1 \cos^2(\frac{\pi x_1}{a}) x_1^2\,, && (19)\\
&= \frac{2}{a}(\frac{a}{\pi})^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du u^2 \cos^2 u\,, && (20)\\
&= a^2 \frac{2}{\pi^3}\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{6}\pi^2 - 1\right)\,, && (21)\\
&= a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right)\,. && (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}_2^2 \rangle_{\mathrm{u}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi_1(x_1)|^2 |\psi_2(x_2)|^2 x_2^2 \,, && (23)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi_2(x_2)|^2 x_2^2 \,, && (24)\\
&= \int_{-a/2}^{a/2} dx_2 \frac{2}{a} \sin^2 (\frac{2\pi x_2}{a}) x_2^2 \,, && (25)\\
&= \frac{2}{a}(\frac{a}{2\pi})^3 \int_{-\pi}^{\pi} du u^2 \sin^2 u \,, && (26)\\
&= a^2 \frac{2}{\pi^3}\pi \left(\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\right) \,, && (27)\\
&= a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2}\right) . && (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_{\mathrm{u}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi_1(x_1)|^2 |\psi_2(x_2)|^2 x_1 x_2 \,, && (29)\\
&= 0 \,. && (30)
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
r_{12} &= a \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2}\right) \right]^{1/2} \,, && (31)\\
&= a \left[\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2}\right]^{1/2} && (32)
\end{aligned}$$

når partiklene er ulike.

For fermioner og bosoner er

$$|\psi(x_1,x_2)|^2_{F/B} = \frac{1}{2}\left[|\psi_1(x_1)|^2|\psi_2(x_2)|^2 + |\psi_1(x_2)\psi_2(x_1)|^2\right] \mp \mathrm{Re}\left[\psi_1^*(x_1)\psi_2(x_1)\psi_2^*(x_2)\psi_1(x_2)\right] \quad (33)$$

Vi beregner dermed

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_1^2 \psi_1^*(x_1)\psi_2(x_1)\psi_2^*(x_2)\psi_1(x_2) &= 0 \,, && (34)\\
\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2^2 \psi_1^*(x_1)\psi_2(x_1)\psi_2^*(x_2)\psi_1(x_2) &= 0 \,, && (35)\\
\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_1 x_2 \psi_1^*(x_1)\psi_2(x_1)\psi_2^*(x_2)\psi_1(x_2) &= \langle 1|\hat{x}|2\rangle\langle 2|\hat{x}|1\rangle && (36)
\end{aligned}$$

Vi bruker

$$\begin{aligned}
\langle 1|\hat{x}|2\rangle &= \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx \cos(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{2\pi x}{a}) x \,, && (37)\\
&= \frac{2}{a}(\frac{a}{\pi})^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du u \cos u \sin 2u \,, && (38)\\
&= \frac{2}{a}(\frac{a}{\pi})^2 \frac{8}{9} \,, && (39)\\
&= a\frac{16}{9\pi^2} \,. && (40)
\end{aligned}$$

Vi finner dermed

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}_1^2 \rangle_{F/B} &= \frac{1}{2}\left[\langle \hat{x}_1^2\rangle_{\rm u} + \langle \hat{x}_2^2\rangle_{\rm u}\right] , && (41)\\
&= \frac{1}{2}(r_{12})^2_{\rm u}, && (42)\\
&= a^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2}\right) , && (43)\\
&= \langle \hat{x}_2^2 \rangle_{F/B} && (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_{F/B} &= \mp |\langle 1|\hat{x}|2\rangle|^2 , && (45)\\
&= \mp a^2 \left(\frac{16}{9\pi^2}\right)^2 && (46)
\end{aligned}$$

Vi finner dermed

$$(r_{12})^2_{\rm F/B} = a^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2} \pm 2\left(\frac{16}{9\pi^2}\right)^2\right) \quad (47)$$

når partiklene er identiske fermioner eller bosoner.

Vi ser dermed at vi har

$$(r_{12})_{\rm B} < (r_{12})_{\rm u} < (r_{12})_{\rm F} \quad (48)$$

som vi skulle forvente siden bosoner effektivt tiltrekker hverandre mens fermioner effektivt frastøter hverandre p.g.a. Pauli-prinsippet.

b) Vi antar nå at de to partiklene begge er elektroner. Vi antar at spinn-egenfunksjonene til det første og det andre elektronet er gitt ved henholdsvis $\chi_\pm(1)$ og $\chi_\pm(2)$, der '+' svarer til en spinn opp tilstand og '-' svarer til en spinn ned tilstand. Hvilke egenverdier for total-spinn, S, og total-spinn langs z-aksen, S_z, er mulige? Hva er to-partikkel spinn-egenfunksjonene med disse S- og S_z-egenverdiene?

LØSNING

Det er to spinn halv partikler. Total spinnet kan da være $S = 0$ eller $S = 1$. For $S = 0$ må spinn-komponenten langs z-aksen også være $S_z = 0$. For $S = 1$ kan vi ha $S_z = -1$, $S_z = 0$ og $S_z = 1$. Tilstandene med $S = 1$ og $S_z = 1$ må da være gitt ved

$$\chi_{1,1} = \chi_+(1)\chi_+(2) \, . \quad (49)$$

Tilsvarende er tilstanden $S = 1$, $S_z = -1$ gitt ved

$$\chi_{1,-1} = \chi_-(1)\chi_-(2) \, . \quad (50)$$

Vi kan nå observere at begge disse tilstandene er symmetriske ved ombytte av partiklene. Dermed må også spinn-tilstanden med samme totale spinn, $S = 1$ og S_z, være symmetrisk ved ombytte av de to partiklene:

$$\chi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_-(1)\chi_+(2)\right] \, . \quad (51)$$

Tilsvarende, må egentilstandene tilsvarende spinn $S = 0$ og $S_z = 0$ være ortogonal til disse tilstandene. Dermed er

$$\chi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2) \right] . \tag{52}$$

Oppgave 3. Spredning

Du kan i denne oppgaven få bruk for følgende relasjoner:

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax) + C . \tag{53}$$

$$\int_0^\infty x \sin(bx) \exp(-cx^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} bc^{-3/2} \exp(-b^2/4c) , c > 0 \tag{54}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots , \tag{55}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots , \tag{56}$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots . \tag{57}$$

a) Gi en fysikalsk definisjon av det differensielle spredningstverrsnitt, $d\sigma/d\Omega$.

I resten av oppgaven skal vi betrakte kvantemekanisk spredning som et stasjonært problem. Vi ser på spredning av partikler med masse m på et potensial $V(\vec{r})$. Innkommende bølge er gitt ved $\psi_{\text{inn}} = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$. Det antas at $V(\vec{r})$ avtar raskt nok til at den spredte bølge for tilstrekkelig store $r = |\vec{r}|$ kan uttrykkes ved:

$$\psi_{\text{spredt}} = \psi(\vec{r}) - \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \approx f(\theta, \phi) \frac{\exp(ikr)}{r} , \tag{58}$$

der

$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \exp(-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}') U(\vec{r}') \psi(\vec{r}') \tag{59}$$

kalles spredningamplituden, $\psi(\vec{r})$ er den totale bølgefunksjonen for problemet, $k = |\vec{k}|$, $\vec{k}_f = k\vec{r}/r$ og $U(\vec{r}) = 2mV(\vec{r})/\hbar^2$.

LØSNING

Det differensielle spredningstverrsnittet er definert ved

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\#\text{ partikler spredt inn i } d\Omega \text{ pr. tidsenhet}}{d\Omega(\#\text{ innfallende partikler pr. flate og tidsenhet})} , \tag{60}$$

der $d\Omega$ er romvinkelen.

b) Hva er spredningsamplituden $f^B(\theta, \phi)$ i første Born-approksimasjon for et generelt potensial $V(\vec{r})$? Vis (på grunnlag av ovenstående) at for et sentralsymmetrisk potensial ($V(\vec{r}) = V(r)$) så kan spredningsamplituden i første Born-approksimasjon uttrykkes ved:

$$f^B(\theta) = f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) V(r) , \tag{61}$$

der $q = |\vec{q}|$ og $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}$.

I hele resten av oppgaven antar vi at situasjonen er slik at første Born-approksimasjon kan nyttes.

LØSNING

Første Born-approksimasjon fåes ved å nytte den innfallende bølge $\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$ for $\psi(\vec{r}')$ i det oppgitte uttrykk for $f(\theta,\phi)$, altså:

$$\begin{aligned} f^B(\theta,\phi) &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \exp(-\vec{k}_f\cdot\vec{r}')U(\vec{r}')\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}')\,, && (62)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \exp(-(\vec{k}_f-\vec{k})\cdot\vec{r}')U(\vec{r}')\,, && (63)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \exp(-\vec{q}\cdot\vec{r}')U(\vec{r}') && (64)\\ & && (65)\end{aligned}$$

Vi antar så $V(\vec{r}) = V(r)$, dvs. $U(\vec{r}) = U(r)$ og får da:

$$f^B(\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \int_0^{\infty} dr r^2 \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{r})U(r)\,. \tag{66}$$

Vi legger z-aksen parallelt med $\vec{q}$ og får da videre:

$$\begin{aligned} f^B(\theta,\phi) &= f^B(q)\,, && (67)\\ &= -\frac{1}{4\pi}2\pi\int_0^{\infty} dr r^2 U(r)\int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \exp(-iqr\cos\theta')\,, && (68)\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dr r^2 U(r)\left[\frac{\exp(-iqr\cos\theta')}{iqr}\right]_0^{\pi}\,, && (69)\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dr r^2 U(r)\frac{1}{qr}\frac{[\exp(iqr)-\exp(-iqr)]}{i}\,, && (70)\\ &= -\frac{1}{q}\int_0^{\infty} dr r \sin(qr)U(r)\,, && (71)\\ &= -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^{\infty} dr r \sin(qr)V(r) && (72)\end{aligned}$$

q.e.d.

c) Beregn $f^B(q)$ og $d\sigma^B/d\Omega$ for partikler med masse m og energi $E = \hbar^2k^2/2m$ som spres på potensialet:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{for} \quad r \le a\,, \\ 0 & \text{for} \quad r > a\,. \end{cases} \tag{73}$$

Det kan benyttes som kjent at

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = |f^B(q)|^2\,. \tag{74}$$

LØSNING

Vi betrakter her spredning på det sentralsymmetriske potensialet

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{for} \quad r \le a \\ 0 & \text{for} \quad r > a \end{cases} \tag{75}$$

og får da ved hjelp av ligningen ovenfor

$$f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr r \sin(qr)V_0\,, \tag{76}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\left[\frac{1}{q^2}\sin(qr) - \frac{r}{q}\cos(qr)\right]\,, \tag{77}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}\left(\sin(qa) - qa\cos(qa)\right)\,, \tag{78}$$

der $q = 2k\sin(\theta/2)$ og dermed

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega}|f^B(q)|^2 = (\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3})\left[\sin(qa) - qa\cos(qa)\right]^2\,. \tag{79}$$

d) Beregn også $f^B(q)$ og $d\sigma^B/d\Omega$ for samme situasjon som i pkt. c), men med potensialet

$$V(r) = V_0\exp(-\frac{r^2}{2(\xi a)^2})\,, \tag{80}$$

der

$$\xi = (\frac{2}{9\pi})^{1/6}\,. \tag{81}$$

Dersom en måler spredning for slike q at $qa \ll 1$, kan en da ut fra spredningseksperimentene skille mellom potensialene gitt i dette punkt og det gitt i pkt. c)? Begrunn svaret.

LØSNING

Vi betrakter her spredning på det sentralsymmetriske potensialet:

$$V(r) = V_0\exp(-\frac{r^2}{2(\xi a)^2})\,, \tag{82}$$

der

$$\xi = (\frac{2}{9\pi})^{1/6}\,. \tag{83}$$

Vi får da for Born sprednings-amplituden:

$$f^B(q) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr r\sin(qr)\exp(-\frac{r^2}{2(\xi a)^2})\,, \tag{84}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\frac{\sqrt{\pi}}{4}q(\frac{1}{2(\xi a)^2})^{-3/2}\exp(-\frac{q^2}{4\frac{1}{2(\xi a)^2}})\,, \tag{85}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}2^{3/2}\xi^3 a^3\exp(-\frac{(\xi a)^2 q^2}{2})\,, \tag{86}$$

$$= -\frac{2mV_0}{3\hbar^2}a^3\exp(-(\frac{2}{9\pi})^{1/3}a^2q^2/2)\,. \tag{87}$$

Dermed er

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = (\frac{2mV_0}{3\hbar^2})^2 a^6\exp(-(\frac{2}{9\pi})^{1/3}a^2q^2)\,. \tag{88}$$

Vi setter indeks c på $f^B(q)$ og $d\sigma^B/d\Omega$ fra pkt. c) og indeks d på de tilsvarende rekkeutviklingene fra pkt. d). Vi får da ved hjelp av de oppgitte rekkeutviklingene for $qa \ll 1$:

$$\begin{aligned} f_c^B(q) &= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}\left[qa - \frac{(qa)^3}{6} - qa + \frac{(qa)^3}{2} + \mathcal{O}((qa)^5)\right], && (89)\\ &= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}\left[\frac{1}{3}(qa)^3 + \mathcal{O}((qa)^5)\right], && (90)\\ &= -\frac{2mV_0}{3\hbar^2}a^3 && (91)\end{aligned}$$

og dermed

$$\frac{d\sigma_c^B}{d\Omega} \approx (\frac{2mV_0}{3\hbar^2})^2 a^6 . \tag{92}$$

Tilsvarende er

$$\begin{aligned} f_d^B(q) &= -\frac{2mV_0}{3\hbar^2}a^3\left(1 + \mathcal{O}((qa)^2)\right), && (93)\\ &= -\frac{2mV_0}{3\hbar^2}a^3 && (94)\end{aligned}$$

og dermed er

$$\frac{d\sigma_d^B}{d\Omega} = (\frac{2mV_0}{3\hbar^2})^2 a^6 . \tag{95}$$

Vi ser at $d\sigma_c^B/d\Omega$ og $d\sigma_d^B/d\Omega$ er uavhengige av q og like store for $qa \ll q$. For $qa \ll 1$ kan en derfor ikke ved spredningseksperimenter skille mellom potensialene gitt i pkt. c) og pkt. d).

Merknad: At vi ikke kan skille mellom disse potensialene ut fra $f^B(q)$ for $qa \ll 1$ kan vi også forstå ved å tenke på at $f^B(q)$ er en Fourieromvending av det spredende potensialet. Ingen av disse potensialene inneholder noen vesentlig Fourierkomponent (utenom konstantledd) ved $q \ll 1/a$. For $qa \ll 1$ må derfor $f^B(q)$ bli q-uavhengig for begge potensialene. Spredningsstyrken for potensialene kunne vi finne ved å sette $\sin(qr) \approx qr$ og dermed

$$f_c^B(q \ll a) \approx f_d^B(q \ll a) \approx -\frac{2}{3}\frac{mV_0}{\hbar^2}a^3 \tag{96}$$

som vi fant ovenfor.