Løsning, eksamen TFY4205 Kvantemekanikk II
Onsdag 8. desember 2010

1a) Det elektriske feltet er

$$\vec{E} = -2\omega K \ \mathrm{Im}\Big[(\vec{e}_x \, a_x + \vec{e}_y \, a_y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big] = -2\omega K \ \mathrm{Im}\Big[(\vec{e}_+ \, a_+ + \vec{e}_- \, a_-) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\Big] \, .$$

Et viktig poeng: $\vec{E}$ er reell, selv om amplitudene $a_x, a_y, a_\pm$ og polarisasjonsvektorene $\vec{e}_\pm$ er komplekse.

Sett først $a_y = 0$, $a_x = 1$. Vi kunne sette $a_x = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ med en vilkårlig amplitude ρ og en vilkårlig fase α, men det ville ikke forandre noe vesentlig i argumentet. Vi får at

$$\vec{E} = -2\omega K \, \vec{e}_x \ \sin(kz - \omega t) \ .$$

Det elektriske feltet peker langs x-aksen, og oscillerer både som funksjon av z ved konstant t, for eksempel $t = 0$:

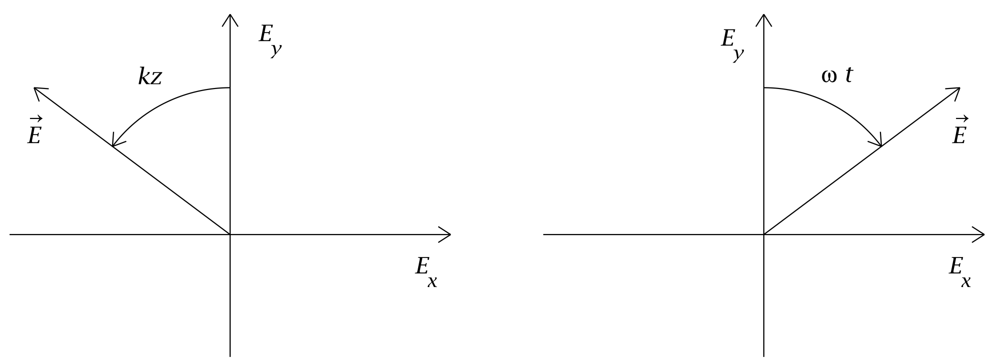
$$\vec{E} = -2\omega K \, \vec{e}_x \ \sin(kz) \ ,$$

og som funksjon av t ved konstant z, for eksempel $z = 0$:

$$\vec{E} = 2\omega K \, \vec{e}_x \ \sin(\omega t) \ .$$

Sett deretter $a_- = 0$, $a_+ = 1$, igjen er amplituden og fasen til a_+ uvesentlig. Vi får at

$$\vec{E} = \sqrt{2}\, \omega K [-\vec{e}_x \ \sin(kz - \omega t) + \vec{e}_y \ \cos(kz - \omega t)] \ .$$



Figur 1: $\vec{E}$ som funksjon av z ved $t = 0$, og som funksjon av t ved $z = 0$.

Det elektriske feltet har nå konstant lengde, $|\vec{E}| = \sqrt{2}\, \omega K$, men har en retning som oscillerer. Som funksjon av z ved konstant t, for eksempel $t = 0$, er

$$\vec{E} = \sqrt{2}\, \omega K \, [-\vec{e}_x \ \sin(kz) + \vec{e}_y \ \cos(kz)] \ .$$

Dette er formelen for en heliks med akse i z-retning, og heliksen er høyredreiende, som en høyreskrue. Som funksjon av t ved konstant z, for eksempel $z = 0$, er

$$\vec{E} = \sqrt{2}\,\omega K\,[\vec{\mathrm{e}}_x \,\sin(\omega t) + \vec{\mathrm{e}}_y \,\cos(\omega t)] \;.$$

Vi ser altså det elektriske feltet rotere i retning med urviseren når vi ser mot bevegelsesretningen til bølgen.

Denne rotasjonsretningen svarer til at z-komponenten av dreieimpulsen er negativ.

Så da burde vi kanskje ha byttet navn på a_+ og a_-?

1b) Bevis for kommutasjonsrelasjonene:

$$\begin{aligned}
[a_+, a_+^\dagger] &= \frac{1}{2}\,[\,a_x + \mathrm{i}a_y\,, a_x^\dagger - \mathrm{i}a_y^\dagger\,] = \frac{1}{2}\Big([a_x, a_x^\dagger] - \mathrm{i}\,[a_x, a_y^\dagger] + \mathrm{i}\,[a_y, a_x^\dagger] + [a_y, a_y^\dagger]\Big) \\
&= \frac{1}{2}\,(1 + 0 + 0 + 1) = 1 \;. \\
[a_+, a_-^\dagger] &= \frac{1}{2}\,[\,a_x + \mathrm{i}a_y\,, a_x^\dagger + \mathrm{i}a_y^\dagger\,] = \frac{1}{2}\Big([a_x, a_x^\dagger] + 0 + 0 - [a_y, a_y^\dagger]\Big) = 0 \;.
\end{aligned}$$

Når det gjelder Hamilton-operatoren, kan vi for eksempel regne baklengs:

$$a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- = \frac{1}{2}\Big((a_x^\dagger - \mathrm{i}a_y^\dagger)(a_x + \mathrm{i}a_y) + (a_x^\dagger + \mathrm{i}a_y^\dagger)(a_x - \mathrm{i}a_y)\Big) = a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y \;.$$

Derfor er $H = \hbar\omega(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1) = \hbar\omega(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1)$.

1c) Beklager fortegnsfeil i en formel i den opprinnelige oppgaveteksten, korrekt versjon er:

$$|+\rangle = a_+^\dagger\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle - \mathrm{i}\,|v\rangle) \;, \qquad |-\rangle = a_-^\dagger\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle + \mathrm{i}\,|v\rangle) \;.$$

Oppgaveteksten utlagt på nett er korrigert.

Enda en kommentar: tilstandene $|h\rangle$ og $|v\rangle$ er ortogonale i Hilbertrommet,

$$\langle h|v\rangle = \langle 0|\,a_x a_y^\dagger\,|0\rangle = \langle 0|\,a_y^\dagger a_x\,|0\rangle = 0 \;.$$

Og det svarer til at polarisasjonsvektorene $\vec{\mathrm{e}}_x$ og $\vec{\mathrm{e}}_y$ er ortogonale i vårt dagligdagse tredimensjonale rom.

Vi så under 1a) at amplituden a_+ svarer til høyredreiende sirkulær polarisering. Fotonet i tilstanden $|+\rangle$ er altså høyredreiende sirkulært polarisert, mens fotonet i tilstanden $|-\rangle$ er venstredreiende sirkulært polarisert.

Tilsvarende til definisjonene

$$\vec{\mathrm{e}}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{\mathrm{e}}_x \mp \mathrm{i}\,\vec{\mathrm{e}}_y) \;, \qquad a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x \pm \mathrm{i}a_y)$$

kan vi definere

$$\vec{\mathrm{e}}_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{\mathrm{e}}_x + \vec{\mathrm{e}}_y) \;, \quad \vec{\mathrm{e}}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{\mathrm{e}}_x - \vec{\mathrm{e}}_y) \;, \quad a_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x + a_y) \;, \quad a_g = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x - a_y) \;,$$

slik at

$$\vec{e}_x\, a_x + \vec{e}_y\, a_y = \vec{e}_f\, a_f + \vec{e}_g\, a_g\ .$$

Amplituden a_f svarer til polarisasjon langs vektoren $\vec{e}_f$, mens a_g svarer til polarisasjon langs vektoren $\vec{e}_g$. Polarisasjonsvektorene $\vec{e}_f$ og $\vec{e}_g$ er dreid 45° i forhold til $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.

I tilstanden

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle + |v\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x^\dagger + a_y^\dagger)\,|0\rangle = a_f^\dagger\,|0\rangle$$

er altså fotonet lineært polarisert langs $\vec{e}_f$, og i tilstanden

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|h\rangle - |v\rangle) = a_g^\dagger\,|0\rangle$$

er fotonet lineært polarisert langs $\vec{e}_g$.

Tilstandene $|+\rangle$ og $|-\rangle$ er ortogonale i Hilbertrommet, og det svarer til at de komplekse polarisasjonsvektorene $\vec{e}_+$ og $\vec{e}_-$ er ortogonale:

$$(\vec{e}_+)^* \cdot \vec{e}_- = \frac{1}{2}\,(\vec{e}_x + \mathrm{i}\vec{e}_y)\cdot(\vec{e}_x + \mathrm{i}\vec{e}_y) = \frac{1}{2}\,(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x - \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y) = \frac{1}{2}\,(1-1) = 0\ .$$

På samme måte er tilstandene $|f\rangle$ og $|g\rangle$ ortogonale, akkurat som polarisasjonsvektorene $\vec{e}_f$ og $\vec{e}_g$ er ortogonale.

1d) For en generell tilstand

$$|\psi\rangle = \psi_h\,|h\rangle + \psi_v\,|v\rangle$$

er sannsynligheten for å måle horisontal polarisasjon gitt som

$$P(h|\psi) = |\langle h|\psi\rangle|^2 = |\psi_h|^2\ ,$$

og sannsynligheten for å måle vertikal polarisasjon er

$$P(v|\psi) = |\langle v|\psi\rangle|^2 = |\psi_v|^2\ .$$

De komplekse koeffisientene ψ_h og ψ_v er sannsynlighetsamplituder.

Alle sannsynlighetene som det spørres etter, er 1/2:

$$P(h|+) = P(v|+) = P(h|-) = P(v|-) = P(h|f) = P(v|f) = P(h|g) = P(v|g) = \frac{1}{2}\ .$$

Det er altså umulig å se forskjell på de fire tilstandene dersom vi bare måler horisontal og vertikal polarisasjon. Skal vi kunne se forskjell, må vi måle noe som gir informasjon om fasene til sannsynlighetsamplitudene.

1e) Kommutatorrelasjonen $[a_x, a_x^\dagger] = 1$ kan skrives slik:

$$a_x a_x^\dagger = a_x^\dagger a_x + 1\ .$$

Nedenfor bruker vi ellers at $a_x\,|0\rangle = a_y\,|0\rangle = 0$ og at $\langle 0|0\rangle = 1$.

Det er da rett fram å bevise at en-fotontilstanden $|h\rangle$ er normert (men det var det ikke spørsmål om i oppgaven):

$$\langle h|h\rangle = \langle 0|\, a_x a_x^\dagger \,|0\rangle = \langle 0|\,(a_x^\dagger a_x + 1)\,|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1 \;.$$

Det er like rett fram å bevise at to-fotontilstanden $|hv\rangle$ er normert:

$$\begin{aligned}\langle hv|hv\rangle &= \langle 0|\, a_y a_x a_x^\dagger a_y^\dagger \,|0\rangle = \langle 0|\,(a_x a_x^\dagger)(a_y a_y^\dagger)\,|0\rangle = \langle 0|\,(a_x^\dagger a_x + 1)(a_y^\dagger a_y + 1)\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\,(a_x^\dagger a_x + 1)\,|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1 \;.\end{aligned}$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}(a_x)^2(a_x^\dagger)^2 &= a_x(a_x a_x^\dagger)a_x^\dagger = a_x(a_x^\dagger a_x + 1)a_x^\dagger = (a_x a_x^\dagger)^2 + a_x a_x^\dagger \\ &= (a_x^\dagger a_x + 1)^2 + (a_x^\dagger a_x + 1) = (a_x^\dagger a_x)^2 + 3a_x^\dagger a_x + 2 \;.\end{aligned}$$

Da kan vi bevise at to-fotontilstanden $|hh\rangle$ er normert:

$$\langle hh|hh\rangle = \frac{1}{2}\,\langle 0|\,(a_x)^2(a_x^\dagger)^2\,|0\rangle = \frac{1}{2}\,\langle 0|\,((a_x^\dagger a_x)^2 + 3a_x^\dagger a_x + 2)\,|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1 \;.$$

Tilsvarende viser vi at tilstanden $|vv\rangle$ er normert.

Dette er ikke den enkleste og mest systematiske måten å regne på. Vi kan bruke Leibniz-regelen for kommutering,

$$[A, BC] = [A, B]\, C + B\, [A, C] \;,$$

til å beregne kommutatoren

$$[a_x, (a_x^\dagger)^2] = [a_x, a_x^\dagger a_x^\dagger] = [a_x, a_x^\dagger]\, a_x^\dagger + a_x^\dagger\, [a_x, a_x^\dagger] = 2a_x^\dagger \;.$$

Eller ganske generelt,

$$[a_x, (a_x^\dagger)^k] = k\,(a_x^\dagger)^{k-1} \;.$$

Så bruker vi at $a_x\,|0\rangle = 0$, det gir at

$$a_x(a_x^\dagger)^k\,|0\rangle = (a_x(a_x^\dagger)^k - (a_x^\dagger)^k a_x)\,|0\rangle = [a_x, (a_x^\dagger)^k]\,|0\rangle = k\,(a_x^\dagger)^{k-1}\,|0\rangle \;.$$

Dermed har vi et mer gjennomskuelig bevis for at to-fotontilstanden $|hh\rangle$ er normert:

$$\langle hh|hh\rangle = \frac{1}{2}\,\langle 0|\,(a_x)^2(a_x^\dagger)^2\,|0\rangle = \frac{1}{2}\,\langle 0|\, a_x a_x (a_x^\dagger)^2\,|0\rangle = \langle 0|\, a_x a_x^\dagger\,|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1 \;.$$

Noen svarer på oppgaven omtrent slik: for en harmonisk oscillator er de normerte energi-egentilstandene $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, osv., med $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ og $a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}\,|1\rangle$. Det er for så vidt korrekt, men er et ufullstendig svar på spørsmålet, vi påstår bare det vi skulle bevise.

Fordi operatorene $a_x^\dagger$ og $a_y^\dagger$ kommuterer, har vi at

$$\begin{aligned}|+-\rangle &= a_+^\dagger a_-^\dagger\,|0\rangle = \frac{1}{2}\,(a_x^\dagger - \mathrm{i}a_y^\dagger)(a_x^\dagger + \mathrm{i}a_y^\dagger)\,|0\rangle = \frac{1}{2}\,((a_x^\dagger)^2 + (a_y^\dagger)^2)\,|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|hh\rangle + |vv\rangle) \;.\end{aligned}$$

I denne tilstanden er det følgelig 50 % sannsynlighet for å observere at begge fotonene er horisontalt polarisert, og 50 % sannsynlighet for å observere at begge fotonene er vertikalt polarisert. Vi vil aldri observere at det ene fotonet er horisontalt og det andre vertikalt polarisert.

Hvis vi måler på to en-fotontilstander, først med fotonet i tilstanden $|+\rangle$ og etterpå med fotonet i tilstanden $|-\rangle$, så har vi hver gang 50 % sannsynlighet for å observere at fotonet er horisontalt polarisert og 50 % sannsynlighet for å observere at det er vertikalt polarisert. Og siden de to målingene er uavhengige av hverandre, har vi 25 % sannsynlighet for å observere at begge fotonene er horisontalt polarisert, 25 % sannsynlighet for å observere at begge er vertikalt polarisert, og 50 % sannsynlighet for å observere at det ene er horisontalt og det andre vertikalt polarisert.

Vi må bare konstatere at en to-fotontilstand med de to fotonene i to ortogonale polarisasjonstilstander er noe helt annet enn to en-fotontilstander med de to fotonene i de samme to ortogonale polarisasjonstilstandene.

Vi kan for eksempel spørre om de to fotonene har samme polarisasjon. Svaret avhenger, neppe helt uventet, av hva slags polarisasjon vi velger å måle.

Hvis vi måler sirkulær polarisasjon, dvs., vi spør om polarisasjonstilstanden er $|+\rangle$ eller $|-\rangle$, så vil vi alltid få som svar at fotonene har motsatt polarisasjon. Naturlig nok, for det var jo slik vi preparerte dem før vi målte, og det gjelder både to-fotontilstanden og de to en-fotontilstandene.

Hvis vi derimot måler lineær polarisasjon, hvis vi for eksempel spør om polarisasjonstilstanden er $|h\rangle$ eller $|v\rangle$, så får vi totalt forskjellige svar for to-fotontilstanden og for en-fotontilstandene. Med to-fotontilstanden vil vi alltid få til svar at fotonene har *samme* polarisasjon, til tross for at vi preparerte dem med *motsatt* polarisasjon. Til gjengjeld er det helt tilfeldig om vi finner at begge har horisontal polarisasjon eller at begge har vertikal polarisasjon. Med en-fotontilstandene er det 50 % sannsynlighet for å måle samme polarisasjon og 50 % sannsynlighet for å måle motsatt polarisasjon, og det ligner kanskje mest på det vi ville vente oss intuitivt?

Dette sitatet fra John Wheeler kan være en passende kommentar her:

If you are not completely confused by quantum mechanics, you do not understand it.

1f) En 100-fotontilstand, der alle de 100 fotonene har samme impuls, har 101 mulige polarisasjonstilstander. Ortonormerte 100-fotontilstander er for eksempel

$$|r,s\rangle = \frac{1}{\sqrt{r!\,s!}}\,(a_x^\dagger)^r(a_y^\dagger)^s\,|0\rangle$$

med $r \geq 0$, $s \geq 0$ og $r + s = 100$. Vi skal ha 100 kreasjonsoperatorer, og hver av dem kan være enten $a_x^\dagger$ eller $a_y^\dagger$. Men disse to operatorene kommuterer, slik at rekkefølgen av dem er likegyldig, bare antallet av $a_x^\dagger$ og antallet av $a_y^\dagger$ har betydning.

At kreasjonsoperatorene $a_x^\dagger$ og $a_y^\dagger$ kommuterer, betyr at fotonene er bosoner: bølgefunksjonen for en mangefotontilstand er fullstendig symmetrisk.

Det er denne symmetriegenskapen som reduserer antallet tilstander så drastisk. Uten den ville antallet tilstander ha vært $2^{100} = 1024^{10} \approx 10^{30}$.

1g) Vi har at

$$\vec{r}_{fi} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ (\psi_f(\vec{r}))^*\, \vec{r}\, \psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi a^4} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{3r}{2a}}\, (x\,\vec{\mathrm{e}}_x + y\,\vec{\mathrm{e}}_y + z\,\vec{\mathrm{e}}_z)(x + \mathrm{i}\,y)\ .$$

Når vi multipliserer ut parentesene i integralet, får vi mange integral som blir null fordi integranden er antisymmetrisk. Som for eksempel

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{3r}{2a}}\, xy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\ y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\frac{3r}{2a}}\, x = 0\ ,$$

der det innerste integralet er null fordi integranden er antisymmetrisk i x. Bare to av integralene blir ikke null, dem kan vi beregne enklest ved et lite knep:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{3r}{2a}}\, x^2 &= \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{3r}{2a}}\, y^2 = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{3r}{2a}}\, z^2 = \frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{3r}{2a}}\, r^2 \\ &= \frac{4\pi}{3}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\frac{3r}{2a}}\, r^4 = \frac{4\pi}{3}\,\frac{4!\,(2a)^5}{3^5} = \frac{1024\,\pi a^5}{243}\ .\end{aligned}$$

Ved delvis integrasjon finner vi, for $\lambda > 0$ og $k > 0$, at

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r^k = -\frac{1}{\lambda}\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r^k\Big|_0^{\infty} + \frac{k}{\lambda}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r^{k-1} = \frac{k}{\lambda}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r^{k-1}\ ,$$

og følgelig

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r^4 = \frac{4!}{\lambda^4}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r} = -\frac{4!}{\lambda^5}\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\Big|_0^{\infty} = \frac{4!}{\lambda^5}\ .$$

En annen måte å regne ut det samme resultatet på er å starte med integralet

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r} = \frac{1}{\lambda}\ .$$

Så opererer vi på denne ligningen fire ganger med $-\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ og får at

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r &= \frac{1}{\lambda^2}\ ,\\ \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r^2 &= \frac{2}{\lambda^3}\ ,\\ \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r^3 &= \frac{3!}{\lambda^4}\ ,\\ \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-\lambda r}\, r^4 &= \frac{4!}{\lambda^5}\ .\end{aligned}$$

Alt i alt gir det at

$$\vec{r}_{fi} = \frac{128\,a}{243}\,(\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i}\,\vec{\mathrm{e}}_y)\ .$$

En grei kontroll er at $\vec{r}_{fi}$ bør ha dimensjon lengde. Svaret på oppgaven er altså:

$$C = \frac{128\,a}{243} = \frac{2^7 a}{3^5}\ .$$

Hvis fotonet sendes ut i (x, y)-planet, så kunne det tenkes å være lineært polarisert langs z-aksen, men i så fall blir overgangssannsynligheten null, fordi $\vec{e} = \vec{\mathrm{e}}_z$ gir at

$$|(\vec{e}^{\,*}) \cdot \vec{r}_{fi}| = C \, |\vec{\mathrm{e}}_z \cdot (\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i}\vec{\mathrm{e}}_y)| = 0 \; .$$

Det betyr at dersom vi gjør et eksperiment der vi tester om fotonet er lineært polarisert i z-retningen, så får vi garantert negativt svar. Sagt med andre ord: fotonet er definitivt ikke lineært polarisert i z-retningen. Når vi vet det, så vet vi at tilstandsvektoren i Hilbertrommet må være ortogonal til den tilstanden der fotonet er lineært polarisert i z-retningen. Det er det samme som at polarisasjonsvektoren til fotonet må være ortogonal til $\vec{\mathrm{e}}_z$. Den må dessuten være ortogonal til bevegelsesretningen til fotonet. La oss si at bølgetallsvektoren er

$$\vec{k} = k \, (\cos\alpha \, \vec{\mathrm{e}}_x + \sin\alpha \, \vec{\mathrm{e}}_y) \; ,$$

da må polarisasjonsvektoren være

$$\vec{e} = -\sin\alpha \, \vec{\mathrm{e}}_x + \cos\alpha \, \vec{\mathrm{e}}_y \; ,$$

slik at $\vec{k} \cdot \vec{e} = 0$. Fotonet er altså lineært polarisert i denne retningen. Da er

$$|(\vec{e}^{\,*}) \cdot \vec{r}_{fi}| = C \, |-\sin\alpha + \mathrm{i} \cos\alpha| = C \; .$$

Overgangssannsynligheten er altså uavhengig av retningen på fotonet, så lenge fotonet sendes ut i (x, y)-planet: vinkelfordelingen av fotonene er isotrop i (x, y)-planet.

Hvis fotonet sendes ut i positiv z-retning, så vil det være sirkulært polarisert. Vi ser at den komplekse polarisasjonsvektoren

$$\vec{\mathrm{e}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \, (\vec{\mathrm{e}}_x - \mathrm{i}\vec{\mathrm{e}}_y)$$

gir null overgangssannsynlighet, idet

$$\begin{aligned} |(\vec{\mathrm{e}}_+^{\,*}) \cdot \vec{r}_{fi}| &= \frac{C}{\sqrt{2}} \, |(\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i}\vec{\mathrm{e}}_y) \cdot (\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i}\vec{\mathrm{e}}_y)| = \frac{C}{\sqrt{2}} \, |\vec{\mathrm{e}}_x \cdot \vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i} \, \vec{\mathrm{e}}_x \cdot \vec{\mathrm{e}}_y + \mathrm{i} \, \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \vec{\mathrm{e}}_x - \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \vec{\mathrm{e}}_y| \\ &= \frac{C}{\sqrt{2}} \, |1 + 0 + 0 - 1| = 0 \; . \end{aligned}$$

Derfor må polarisasjonsvektoren være ortogonal til $\vec{\mathrm{e}}_+$, og den eneste muligheten er

$$\vec{\mathrm{e}}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \, (\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i}\vec{\mathrm{e}}_y) \; .$$

Den gir en overgangssannsynlighet ulik null, idet

$$|(\vec{\mathrm{e}}_-^{\,*}) \cdot \vec{r}_{fi}| = \frac{C}{\sqrt{2}} \, |(\vec{\mathrm{e}}_x - \mathrm{i}\vec{\mathrm{e}}_y) \cdot (\vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{i}\vec{\mathrm{e}}_y)| = \frac{C}{\sqrt{2}} \, |\vec{\mathrm{e}}_x \cdot \vec{\mathrm{e}}_x + \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \vec{\mathrm{e}}_y| = \sqrt{2} \, C \; .$$

Konklusjon: hvis fotonet kommer ut i positiv z-retning, er det i den sirkulære polarisasjonstilstanden $|-\rangle$.

Merk at overgangssannsynligheten er proporsjonal med C^2 for et foton som sendes ut i (x, y)-planet, og proporsjonal med $2C^2$ for et foton som sendes ut langs z-aksen.

Vinkelfordelingen av fotonene er ikke isotrop i alle tre dimensjonene: innenfor en gitt romvinkel kommer det ut dobbelt så mange fotoner langs z-aksen som i (x, y)-planet.

Den sirkulære polarisasjonen til fotonene som sendes ut langs z-aksen kan vi forstå som en konsekvens av at dreieimpulsen er bevart. Atomet har en dreieimpuls langs z-aksen som er $+\hbar$ i start-tilstanden ψ_i og 0 i slutt-tilstanden ψ_f. Altså må fotonet ha overtatt z-komponenten av dreieimpulsen. Når impulsen til fotonet, $\vec{p}_\gamma = \hbar\vec{k} = \hbar k\vec{e}_z$, peker langs den positive z-aksen, så kan ikke banedreieimpulsen til fotonet, $\vec{L}_\gamma = \vec{r}_\gamma \times \vec{p}_\gamma$, ha noen komponent langs z-aksen. Altså må spinnet til fotonet, $\vec{S}_\gamma$, ha z-komponent lik $+\hbar$. Det stemmer med det vi fant ut ovenfor, under punkt 1a), at fotonet i den sirkulære polarisasjonstilstanden $|-\rangle$ har positiv komponent av dreieimpulsen langs z-aksen.

Spinnkomponenten langs impulsen, $\vec{S}_\gamma \cdot \vec{k}/k$, kalles helisitet. Et foton kan ha helisitet enten $+\hbar$ eller $-\hbar$, hvis det da ikke er i en tilstand som er en superposisjon av de to helisitetsegentilstandene. Fotonet som hydrogenatomet sender ut langs den positive z-aksen, i vårt eksempel, har helisitet $+\hbar$, som en konsekvens av at z-komponenten av dreieimpulsen er bevart.

2a) Born-tilnærmingen gir spredningsamplituden f^B som et integral, og når potensialet er kulesymmetrisk, kan vi utføre vinkelintegrasjonen. I integrasjonen bruker vi polarkoordinater med z-aksen langs $\vec{q}$. Vi må skille mellom spredningsvinklene θ og ϕ og polarvinklene i integralet, la oss kalle dem α og β. Polarvinklene θ og ϕ bestemmer retningen til den utgående impulsen $\hbar\vec{k}\,'$ i forhold til den innkommende impulsen $\hbar\vec{k}$, og dermed retningen til $\vec{q} = \vec{k}\,' - \vec{k}$, mens α og β bestemmer retningen til integrasjonsvariabelen $\vec{r}$ i forhold til $\vec{q}$. Det gir at

$$
\begin{aligned}
f^B(\vec{q}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\; V(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{r}} \\
&= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\alpha) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta\; V(r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr\cos\alpha} \\
&= -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^2\, V(r) \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qru} = -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^2\, V(r)\; \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qru}}{-\mathrm{i}qr}\right|_{u=-1}^{u=1} \\
&= -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^2\, V(r)\, \frac{2\sin(qr)}{qr} = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty \mathrm{d}r\; r\, V(r) \sin(qr)\;.
\end{aligned}
$$

2b) Den viktigste forutsetningen for partialbølgeutviklingen er at potensialet er kulesymmetrisk, slik at banedreieimpulsen $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ er bevart. Når vi kvantiserer $\vec{L}^2$ til verdien $\ell(\ell+1)\hbar^2$, så er kvantetallet ℓ bevart, og det eneste som kan skje med en innkommende bølge, er at den kommer ut igjen med en ℓ-avhengig faseforskyving δ_ℓ.

Siden asimutvinkelen ϕ ikke opptrer i partialbølgeutviklingen, er det lett å tenke (som mange eksamenskandidater gjør) at sylindersymmetri er tilstrekkelig, at full kulesymmetri ikke er nødvendig, men det er altså ikke korrekt.

Det er også en forutsetning at det ikke finnes uelastisk spredning. Partialbølgeutviklingen på den formen som er gitt her, er gyldig for partikler uten spinn (eller for partikler med spinn når spredningen er uavhengig av spinnet).

Anta at potensialet har en endelig rekkevidde R. I grensen når energien går mot null, bidrar da bare partialbølgene med lav ℓ. Det kan vi forstå ut fra et klassisk resonnement:

dreieimpulsen $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ til partikkelen som blir spredt, begrenses av ulikheten

$$L = |\vec{L}| \approx \ell\hbar \leq R\,|\vec{p}| = \hbar Rk \ ,$$

altså $\ell \lesssim Rk$. Ut fra Schrödingerligningen kan det vises, for eksempel for spredning på en hard kule, at $\delta_\ell \to 0$ som $k^{2\ell+1}$ når $k \to 0$.

Det er derfor en god tilnærming å bruke partialbølgeutviklingen med bare noen få ledd i summen når potensialet har endelig rekkevidde og energien er lav.

Første ordens Born-tilnærming er bedre når energien er høy. Born-tilnærmingen blir generelt bedre når energien øker (i følge P.C. Hemmers lærebok). I motsetning til partialbølgeutviklingen med få ledd i summen, som blir dårligere når energien øker.

2c) Totaltverrsnittet, integrert over alle spredningsvinklene, er

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int d\Omega\, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega\, |f(\theta)|^2 = 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ f(\theta)\,(f(\theta))^* \\
&= \frac{2\pi}{k^2} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} (2\ell+1)(2\ell'+1)\ e^{i(\delta_\ell - \delta_{\ell'})} \sin\delta_\ell\ \sin\delta_{\ell'}\ P_\ell(\cos\theta)\, P_{\ell'}(\cos\theta) \\
&= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} (2\ell+1)(2\ell'+1)\ e^{i(\delta_\ell - \delta_{\ell'})} \sin\delta_\ell\ \sin\delta_{\ell'}\ \frac{2\,\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1} \\
&= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\ \sin^2\delta_\ell\ .
\end{aligned}$$

Når vi setter spredningsvinkelen lik null og tar imaginærdelen av spredningsamplituden, får vi at

$$\mathrm{Im}\, f(0) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\ (\mathrm{Im}\, e^{i\delta_\ell}) \sin\delta_\ell\ P_\ell(1) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\ \sin^2\delta_\ell = \frac{k}{4\pi}\,\sigma\ .$$

Dette er det optiske teoremet.

Første ordens Born-tilnærming med et kulesymmetrisk potensial gir en rent reell spredningsamplitude, i følge formelen vi beviste under punkt 2a). Det resultatet er ikke konsistent med det optiske teoremet.