NTNU

Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4210 Anvendt Kvantemekanikk våren 2010

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Laurdag 12. juni 2010
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Vi bruker metrikken $(1, -1, -1, -1)$ og einingar er $\hbar = c = 1$. Oppgåvesettet er på fire sider. Nyttige formlar finn du på slutten. Les oppgåvene nøye. Lykke til.

Oppgåve 1

Lagrangetettheiten for eit komplekst skalarfelt med masse m og ladning q som er kopla til eit elektromagnetisk felt er

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^*(D^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \; .$$

1) Vis at bevegelseslikninga for for Φ^*

$$\left[D_\mu D^\mu + m^2 \right] \Phi = 0 \; .$$

Vi skal nå studere ein partikkel i to romlege dimensjonar med ladning q i eit ytre elektromagnetisk felt som er gjeven ved vektorpotensialet $A^\mu = (0, -By, 0, 0)$, der B er konstant.

2) Rekn ut det elektriske feltet $\mathbf{E}$ og magnetfeltet $\mathbf{B}$.

3) Vis at Hamiltontettheiten kan skrivast som

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= (\partial_0\Phi)^* (\partial_0\Phi) + [(\partial_x - iqBy)\Phi^*] [(\partial_x + iqBy)\Phi] + (\partial_y\Phi)^* (\partial_y\Phi) \\ &\quad + m^2\Phi^*\Phi + \frac{1}{2}B^2 \ .\end{aligned}$$

Er $\mathcal{H}$ Lorentz invariant?

4) Eigenfunksjonane til bevegelseslikninga kan skrivast som

$$\Phi = e^{-i(Et - p_x x)} f(y) \ ,$$

der E er energien til tilstanden og p_x er x-komponenten til impulsen. Vis ved innsetting i bevegelseslikninga at $f(y)$ tilfredsstiller

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} - E^2 + m^2 + (p_x - qBy)^2\right] f(y) = 0 \ .$$

Bruk dette til å rekne ut spekteret, i.e. finn energieigenverdiane E. Hint: Harmonisk oscillator.

Oppgåve 2

Vi skal nå studere ein svakt vekselverkande Bosegass ved $T = 0$. $a_{\mathbf{p}}$ er ein annihilasjonsoperator for ein partikkel med impuls $\mathbf{p}$ og $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ er ein kreasjonsoperator for ein partikkel med impuls $\mathbf{p}$. Bogoliubovtransformasjonen er gjeven ved

$$\begin{aligned} a^\dagger_{\mathbf{p}} &= u_{\mathbf{p}} b^\dagger_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} \\ a_{\mathbf{p}} &= u_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}} b^\dagger_{-\mathbf{p}} \ . \end{aligned}$$

Merk at $u_{\mathbf{p}}$ og $v_{-\mathbf{p}}$ er reelle.

1) Finn likninga som $u_{\mathbf{p}}$ og $v_{-\mathbf{p}}$ må tilfredsstille for at kvasipartikkeloperatorane $b_{\mathbf{p}}$ og $b^\dagger_{\mathbf{p}}$ skal tilfredsstille dei vanlege kommutasjonsrelasjonane

$$[b_{\mathbf{p}}, b^\dagger_{\mathbf{k}}] = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \ ,$$

og alle andre kommutatorar er lik null.

2) Den vekselverkande grunntilstanden for Bosegassen er $|\Phi\rangle$. Rekn ut middelet

$$\langle a_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} \rangle \;=\; \langle \Phi | a_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} | \Phi \rangle \;.$$

3) Forklar kort "*condensate depletion*" i eit Bosekondensat.

Oppgåve 3

Vi skal nå studere ein svakt vekselverkande Bose gas med verknad

$$S \;=\; \int dt\, d^3x \left[i\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\partial_0\psi(\mathbf{x},t) + \mu\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t) - \frac{1}{2m}\nabla\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\psi(\mathbf{x},t) \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}g\left(\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t)\right)^2 \right] \;,$$

der ψ er eit komplekst Bosefelt, μ er det kjemiske potensialet og $g = 4\pi a/m$, der m er massen til bosona og a er spreiingslengda. Vi skriv det komplekse feltet på polar form

$$\psi(\mathbf{x},t) = \sqrt{\sigma(\mathbf{x},t)}\, e^{i\phi(\mathbf{x},t)} \;,$$

der σ er tettheitsoperatoren $\psi^\dagger\psi$ og ϕ er fasen til ψ. Ved $T = 0$, er systemet i den kondenserte fasen der ρ_0 er storleiken til kondensatet. Vi skriv difor σ by $\rho_0 + \tilde{\sigma}$, der $\tilde{\sigma}$ er eit fluktuerande kvantefelt. Insett i verknaden får ein

$$S \;=\; \int dt\, d^3x \left\{ -(\rho_0+\tilde{\sigma})\partial_0\phi - \frac{1}{2m}\left[(\rho_0+\tilde{\sigma})(\nabla\phi)^2 + \frac{(\nabla\tilde{\sigma})^2}{4(\rho_0+\tilde{\sigma})} \right] \right.$$
$$\left. +\mu(\rho_0+\tilde{\sigma}) - \frac{1}{2}g(\rho_0+\tilde{\sigma})^2 \right\} \;,$$

der vi har neglisjert ein totaldivergens. Frå nå av går vi utifrå at tettheitsfluktuasjonane er små samanlikna med ρ_0. Vi kan difor rekkeutvikle $1/4(\rho_0+\tilde{\sigma})$ i verknaden Dette gjev

$$S \;=\; \int dt\, d^3x \left\{ -(\rho_0+\tilde{\sigma})\partial_0\phi - \frac{1}{2m}\left[(\rho_0+\tilde{\sigma})(\nabla\phi)^2 + \frac{(\nabla\tilde{\sigma})^2}{4\rho_0} + ... \right] \right.$$
$$\left. +\mu(\rho_0+\tilde{\sigma}) - \frac{1}{2}g(\rho_0+\tilde{\sigma})^2 \right\} \;,$$

der ... indikerer ledd som er av høgare orden i $\tilde{\sigma}$.

1) Vis at bevegelseslikninga for $\tilde{\sigma}$ kan skrivast som

$$\tilde{\sigma} \;=\; -\frac{1}{g}\left[\partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 - A\nabla^2\tilde{\sigma} \right] \;.$$

og finn koeffisienten A. Hint: Bruk $\mu = g\rho_0$.

2) Bevegelseslikninga for $\tilde{\sigma}$ kan løysast ved iterasjon og som ein første tilnærming set vi $A = 0$. Bruk dette til å eliminere $\tilde{\sigma}$ frå verknaden og vis at vi kan skrive

$$S = \int dt\, d^3x \left\{ B\left[\partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2\right] + C\left[\partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2\right]^2 + ... \right\} ,$$

og finn koeffisientane B og C.

3) Ein Galileantransformasjon er definert ved

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t , \\ t' &= t , \end{aligned}$$

der $\mathbf{v}$ er hastigheiten til inertialsystemet S' i S. Dei ulike deriverte transformerer som

$$\begin{aligned} \nabla\phi &\to \nabla\phi + m\mathbf{v} , \\ \partial_0\phi &\to \partial_0\phi - \mathbf{v}\cdot\nabla\phi - \frac{1}{2}mv^2 . \end{aligned}$$

Er verknaden invariant under Galileantransformasjonar?

4) Finn propagatoren for feltet ϕ.

5) Finn spekteret og kommenter resultatet.

Nyttige formlar:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{Maxwell}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) , \\ D_\mu &= \partial_\mu + iqA_\mu , \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \end{aligned}$$