NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4210 Kvanteteorien for mangepartikkelsystem våren 2011

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Tirsdag 24. Mai 2011
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Vi bruker metrikken $(1, -1, -1, -1)$ og einingar er $\hbar = c = 1$. Oppgåvesettet er på fire sider. Nyttige formlar finn du på slutten. Les oppgåvene nøye. Lykke til.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi sjå på Dirac fermion i $2+1$ dimensjonar, det vil seie i x-y planet. Lagrangetettheiten er gjeve ved

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi \, , \tag{1}$$

der $\mu = 0, 1, 2$ og m er massen til fermiona. γ-matrisene tilfredstiller Clifford-algebraen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \, . \tag{2}$$

I 3+1 dimensjonar er desse matrisene 4×4 matriser, men i i 2+1 dimensjonar kan ein velje 2×2 matriser. Vi veljar $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^1 = i\sigma_2$ og $\gamma^2 = -i\sigma_1$, der σ_i er Pauli matrisene. I denne oppgåva bruker vi metrikken $(1, -1, -1)$.

1) Vis at Lagrangetettheiten er er invariant under globale fasetransformasjonar. Er Lagrangentettheiten invariant under andre transformasjonar?

Vi koplar nå fermionfeltet til eit gaugefelt A_μ ved å erstatte den partielt deriverte med ein kovariant derivert, det vil seie $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$, der q er ladninga til fermiona.

2) Gaugefeltet er i resten av oppgåva gjeve ved $A^\mu = (0, 0, Bx)$. Det vil seie at gaugefeltet er eit ytre felt. Finn felta $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$. Forklar kort kvifor x-komponenten til impulsen ikkje er noko godt kvantetal og kvifor y-komponenten til impulsen er eit godt kvantetal.

3) Vis at Diraclikninga kan skrivast som

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} - m & i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - iqBx \\ -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - iqBx & -i\frac{\partial}{\partial t} - m \end{pmatrix} \psi \quad = \quad 0\ . \tag{3}$$

Vi kan skrive eigenfunksjonane $\psi(\mathbf{r}, t)$ som

$$\psi(\vec{r}, t) \quad = \quad e^{-i(Et - p_y y)} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\ , \tag{4}$$

der E er energien til eigentilstanden og p_y er y-komponenten til impulsen, $f(x)$ og $g(x)$ er funksjonar av x. Bruk dette til å finne spekteret, det vil seie energieigenverdiane E.

Oppgåve 2

I denne oppgåva skal vi studere eit komplekst skalarfelt Φ med eit kjemisk potensial μ som vekselverkar med seg sjøl. Dette gjer ein ved å erstatte den partielt deriverte ∂_0 med den kovariant deriverte $\partial_0 - i\mu$ i Lagrangetettheiten som da kan skrivast

$$\mathcal{L} \quad = \quad (\partial_0 + i\mu)\Phi^*(\partial^0 - i\mu)\Phi + (\partial_i\Phi)^*(\partial^i\Phi) - m^2\Phi^*\Phi - \frac{\lambda}{6}(\Phi^*\Phi)^2\ . \tag{5}$$

1) Er Lagrangetettheiten Lorentzinvariant?

Vi skriv nå feltet Φ som summen av eit klassisk felt ϕ_0 og eit fluktuerande kvantefelt med

$$\Phi \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_0 + \phi_1 + i\phi_2\right)\ . \tag{6}$$

2) Vis at det klassiske potensialet er

$$V_0 = \frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\phi_0^2 + \frac{\lambda}{24}\phi_0^4 \, . \tag{7}$$

3) I resten av oppgåva er $m^2 > 0$. Finn det globale minimumet for potensialet V_0 som funksjon av μ. Teikn figur og forklar.

4) Leddet i $\mathcal{L}$ som er kvadratisk i kvantefelta kan skrivast som

$$\mathcal{L}_{\rm kvad} = -\frac{1}{2}(\phi_1, \phi_2)\begin{pmatrix} \partial_0^2 - \nabla^2 + M_1^2 & -2\mu\partial_0 \\ 2\mu\partial_0 & \partial_0^2 - \nabla^2 + M_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \, , \tag{8}$$

der $M_1^2 = m^2 - \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2$ og $M_2^2 = m^2 - \mu^2 + \frac{\lambda}{6}\phi_0^2$. Bruk dette til å finne dispersjonsrelasjonane som funksjon av μ. Forklar resultata.

Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi studere bosonar og Bose-Einstein kondensasjon i to romlege dimensjonar.

1) Den frie energientettheiten $\mathcal{F}$ er gjeve ved

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} + \frac{1}{2}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\epsilon(p) \, , \tag{9}$$

der μ er det kjemiske potensialet, g er koplingskonstanten og $\epsilon(p)$ er Bogoliubovs dispersjonsrelasjon

$$\epsilon(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2m}\left(\frac{p^2}{2m} + 2\mu\right)} \, , \tag{10}$$

der m er massen til bosona.

1) Forklar kort dei ulike ledda i uttrykket for $\mathcal{F}$. Vis at den renormalisert frie energien $\mathcal{F}$ kan skrivast

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} - \frac{m\mu^2}{8\pi}\left[\ln\frac{\Lambda^2}{\mu} + C\right] \, . \tag{11}$$

2) Bruk dette resultatet til å rekne ut tettheiten som funksjon av μ og energitettheiten $\mathcal{E}$ som funksjon av ρ.

3) I denne oppgåva har vi brukt dimensjonell regularisering. Nemn ein annan

måte å regularisere divergente integral på. Kva er fordelane med dimensjonell regularisering?

Nyttige formlar:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^{2\epsilon} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} p\sqrt{p^2 + y^2} &= -\frac{y^4}{32\pi}\left[\frac{1}{\epsilon} + \log\frac{\Lambda^2}{m\mu} + C + \mathcal{O}(\epsilon)\right] , \\
\rho &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu} \\
\mathcal{E} &= \mathcal{F} + \rho\mu , \\
\mathbf{E} &= -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \\
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} .
\end{aligned}$$