Eksamen i Anvendt kvantemekanikk, fag SIF 4047
Onsdag 8. mai 2002
Løsninger

1a) Vi har at

$$(\vec{p}+e\vec{A})^2 = \vec{p}^{\,2} + e\vec{p}\cdot\vec{A} + e\vec{A}\cdot\vec{p} + e^2\vec{A}^{\,2} \ .$$

Her er $\vec{p}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{p}$, fordi $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$, $A_z = 0$, og dermed $p_xA_x = A_xp_x$, $p_yA_y = A_yp_y$, $p_zA_z = A_zp_z$. Eller mer generelt: når vi velger gauge (justering) slik at $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, så er $\vec{p}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{p}$, fordi

$$\vec{p}\cdot\vec{A}\,\psi = -\mathrm{i}\hbar\nabla\cdot(\vec{A}\,\psi) = -\mathrm{i}\hbar(\nabla\cdot\vec{A})\,\psi - \mathrm{i}\hbar\vec{A}\cdot\nabla\psi = \vec{A}\cdot\vec{p}\,\psi$$

for en vilkårlig bølgefunksjon $\psi = \psi(\vec{r})$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\,(\vec{p}^{\,2} + 2e\vec{A}\cdot\vec{p} + e^2\vec{A}^{\,2}) + \frac{e}{m}\,S_zB \\ &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p}^{\,2} + eB(-yp_x + xp_y) + \frac{e^2B^2}{4}\,(x^2+y^2)\right) + \frac{eB}{m}\,S_z \ . \end{aligned}$$

Vi setter inn $L_z = xp_y - yp_x$ og $\omega = eB/m$ og får det oppgitte uttrykket

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{8}\,m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{\omega}{2}\,(L_z + 2S_z) \ .$$

De fire operatorene H, p_z, S_z og L_z kommuterer innbyrdes, og kan derfor kvantiseres samtidig, det vil si at de har et fullstendig sett av felles egenfunksjoner. For en felles egenfunksjon ψ gjelder at

$$H\psi = E\psi \ , \qquad p_z\psi = \hbar k_z\psi \ , \qquad L_z\psi = m_l\,\hbar\psi \ , \qquad S_z\psi = m_s\,\hbar\psi \ ,$$

der E, k_z, $m_l = 0,1,2,\ldots$ og $m_s = \pm 1/2$ er kvantetall for henholdsvis H, p_z, S_z og L_z. Her er det to ledd i Hamilton-operatoren H som bare gir konstante bidrag til energien E, nemlig $p_z^2/(2m) = \hbar^2k_z^2/(2m)$ og $\omega S_z = m_s\hbar\omega$ (leddet $\omega L_z/2 = m_l\hbar\omega/2$ gir også et konstant bidrag til E, men i tillegg er egenverdien til $p_x^2 + p_y^2$ avhengig av m_l).
Derfor kan vi løse det tredimensjonale problemet ved å løse det todimensjonale problemet der Hamilton-operatoren er

$$H' = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{8}\,m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{\omega}{2}\,(L_z + 2m_s\hbar) \ .$$

1b) Det er enklest å verifisere formlene ved å regne baklengs. Vi har at

$$u^*\,\frac{\partial}{\partial u^*} - u\,\frac{\partial}{\partial u} = \frac{x+\mathrm{i}y}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{x-\mathrm{i}y}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) = \mathrm{i}y\,\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}x\,\frac{\partial}{\partial y} = \frac{L_z}{\hbar} \ .$$

Og at

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial u^*} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = -\frac{p_x^2 + p_y^2}{4\hbar^2} \ .$$

1c) Derivasjonsoperatorene $\partial/\partial u$ og $\partial/\partial u^*$ virker som om u og u^* er uavhengige variable. Derfor er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\,\psi_n &= \mathcal{N}_n\,\frac{\partial}{\partial u}\left(u^n\,\mathrm{e}^{-\gamma u u^*}\right) = \mathcal{N}_n\left(n u^{n-1} - \gamma u^* u^n\right)\mathrm{e}^{-\gamma u u^*} = \left(\frac{n}{u} - \gamma u^*\right)\psi_n\;, \\
\frac{\partial}{\partial u^*}\,\psi_n &= \mathcal{N}_n\,\frac{\partial}{\partial u^*}\left(u^n\,\mathrm{e}^{-\gamma u u^*}\right) = \mathcal{N}_n\left(-\gamma u^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\gamma u u^*}\right) = -\gamma u \psi_n\;.
\end{aligned}$$

Det gir da at

$$L_z\psi_n = \hbar\left(u^*\,\frac{\partial}{\partial u^*} - u\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\psi_n = -n\hbar\psi_n\;.$$

Dessuten gir det at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial u^*}\,\psi_n &= \frac{\partial}{\partial u}\,(-\gamma u\psi_n) = -\gamma\psi_n - \gamma u\left(\frac{n}{u} - \gamma u^*\right)\psi_n \\
&= \left(-(n+1)\gamma + \gamma^2|u|^2\right)\psi_n\;.
\end{aligned}$$

Følgelig er

$$\begin{aligned}
H'\psi_n &= \left(-\frac{2\hbar^2}{m}\,\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial u^*} + \frac{1}{8}\,m\omega^2\,|u|^2 + \frac{\omega}{2}\,(L_z - \hbar)\right)\psi_n \\
&= \left(-\frac{2\hbar^2}{m}\left(-(n+1)\gamma + \gamma^2|u|^2\right) + \frac{1}{8}\,m\omega^2\,|u|^2 - \frac{\omega}{2}\,(n+1)\hbar\right)\psi_n\;.
\end{aligned}$$

For at ψ_n skal bli en egenfunksjon for H', må vi eliminere de to leddene med $|u|^2$, og det gjør vi ved å velge

$$\gamma = \frac{m\omega}{4\hbar}\;.$$

Vi må velge $\gamma > 0$ for at ψ_n skal bli kvadratisk integrerbar. Det gir at

$$H'\psi_n = \left(\frac{2\hbar^2}{m}\,(n+1)\gamma - \frac{\omega}{2}\,(n+1)\hbar\right)\psi_n = 0\;.$$

Energien (dvs. egenverdien til H') er altså $E' = 0$. Vi har en Hamilton-operator som beskriver en harmonisk oscillator, med et tilleggsledd som er energien til spinnets magnetiske moment i magnetfeltet. Spinnenergien kansellerer nøyaktig nullpunktsenergien til den harmoniske oscillatoren, slik at den totale energien blir null.
Vi skal vise ortonormalitet i to dimensjoner (ikke i tre dimensjoner!)
Dvs., vi skal vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\;\psi_k^*\,\psi_n = \mathcal{N}_k^*\,\mathcal{N}_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\;(u^*)^k\,u^n\,\mathrm{e}^{-2\gamma|u|^2} = \delta_{kn}\;.$$

Med polarkoordinater r, φ definert ved at $u = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, er

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\;(u^*)^k\,u^n\,\mathrm{e}^{-2\gamma|u|^2} &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty} r\,\mathrm{d}r\;r^{k+n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\varphi}\,\mathrm{e}^{-2\gamma r^2} \\
&= \delta_{kn}\,\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}(r^2)\;(r^2)^n\,\mathrm{e}^{-2\gamma r^2} = \delta_{kn}\,\frac{\pi n!}{(2\gamma)^{n+1}}\;.
\end{aligned}$$

Det bekrefter at de oppgitte normeringskonstantene er korrekte,

$$\mathcal{N}_n = \sqrt{\frac{(2\gamma)^{n+1}}{\pi n!}}\ .$$

Vi har at

$$|\psi_n|^2 = \frac{(2\gamma)^{n+1}}{\pi n!}\, r^{2n}\, \mathrm{e}^{-2\gamma r^2}\ .$$

Det er klart at $\psi_n \to 0$ når $r \to \infty$.
Det er like klart at $|\psi_0|^2 = (2\gamma/\pi)\, \mathrm{e}^{-2\gamma r^2}$ er maksimal for $r = 0$.
For $n > 0$ gjelder at $\psi_n \to 0$ svært raskt, nemlig som r^{2n}, når $r \to 0$, og dessuten at $|\psi_n|^2$ er maksimal for en verdi av r der

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(r^2)}\, |\psi_n|^2 = |\mathcal{N}_n|^2\, (n r^{2(n-1)} - 2\gamma r^{2n}) \mathrm{e}^{-2\gamma r^2}\ ,$$

dvs. for

$$r = r_n = \sqrt{\frac{n}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}}\ .$$

Vi kan altså si med en viss rett at i tilstanden ψ_n er elektronet lokalisert i nærheten av periferien til en sirkel om origo med radius r_n.

2a) Vi har at

$$\begin{aligned}\psi_{mn} &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \mathcal{N}_m\, u_1^m\, \mathrm{e}^{-\gamma|u_1|^2} & \mathcal{N}_n\, u_1^n\, \mathrm{e}^{-\gamma|u_1|^2} \\ \mathcal{N}_m\, u_2^m\, \mathrm{e}^{-\gamma|u_2|^2} & \mathcal{N}_n\, u_2^n\, \mathrm{e}^{-\gamma|u_2|^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \mathcal{N}_m \mathcal{N}_n\, (u_1^m u_2^n - u_1^n u_2^m)\, \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2)}\ .\end{aligned}$$

Og tilsvarende er

$$\psi_{kmn} = \frac{1}{\sqrt{3!}}\, \mathcal{N}_k \mathcal{N}_m \mathcal{N}_n \begin{vmatrix} u_1^k & u_1^m & u_1^n \\ u_2^k & u_2^m & u_2^n \\ u_3^k & u_3^m & u_3^n \end{vmatrix}\, \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2+|u_3|^2)}\ .$$

Vi ser at ψ_{mn} er en sum av to produktbølgefunksjoner, og at ψ_{kmn} er en sum av $3! = 6$ produktbølgefunksjoner.
Vi har f.eks. at produktbølgefunksjonen $u_1^m u_2^n\, \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2)}$ er en egenfunksjon for $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ med egenverdi $-(m+n)\hbar$, og en egenfunksjon for $H^0 = H_1^0 + H_2^0$ med egenverdi $0 + 0 = 0$.
Det samme gjelder for produktbølgefunksjonen $u_1^n u_2^m\, \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2)}$, og dermed også for ψ_{mn}.
På tilsvarende måte er ψ_{kmn} en egenfunksjon for $L_z = L_{1z} + L_{2z} + L_{3z}$ med egenverdi $-(k+m+n)\hbar$, og en egenfunksjon for $H^0 = H_1^0 + H_2^0 + H_3^0$ med egenverdi $0+0+0 = 0$.

2b) Vi har at

$$\psi_2^L = \mathcal{N}_2^L\, (u_1^3 - 3u_1^2 u_2 + 3u_1 u_2^2 - u_2^3)\, \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2)}$$

De Slater-determinantene som inngår her, er

$$\begin{aligned}
\psi_{03} &= \frac{1}{\sqrt{2!}}\,\mathcal{N}_0\mathcal{N}_3\,(u_1^0u_2^3 - u_1^3u_2^0)\,\mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2)}\ ,\\
\psi_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2!}}\,\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2\,(u_1^1u_2^2 - u_1^2u_2^1)\,\mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2)}\ .
\end{aligned}$$

Og vi ser at

$$\begin{aligned}
\psi_2^L &= \mathcal{N}_2^L\left(-\frac{\sqrt{2}}{\mathcal{N}_0\mathcal{N}_3}\,\psi_{03} + \frac{3\sqrt{2}}{\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2}\,\psi_{12}\right) = \mathcal{N}_2^L\sqrt{\frac{2\pi^2}{(2\gamma)^5}}\left(-\sqrt{0!\,3!}\,\psi_{03} + 3\sqrt{1!\,2!}\,\psi_{12}\right)\\
&= \mathcal{N}_2^L\sqrt{\frac{12\pi^2}{(2\gamma)^5}}\,(-\psi_{03} + \sqrt{3}\,\psi_{12}) = \frac{1}{2}\,(-\psi_{03} + \sqrt{3}\,\psi_{12})\ .
\end{aligned}$$

Det siste uttrykket er opplagt en normert bølgefunksjon, fordi ψ_{03} og ψ_{12} er ortonormale. Siden ψ_{03} og ψ_{12} begge er egenfunksjoner for $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ og $H^0 = H_1^0 + H_2^0$ med egenverdier henholdsvis $-3\hbar$ og 0, gjelder det samme for Laughlin-bølgefunksjonen ψ_2^L. På tilsvarende måte er ψ_3^L en egenfunksjon for $L_z = L_{1z} + L_{2z} + L_{3z}$ og for $H^0 = H_1^0 + H_2^0 + H_3^0$ med egenverdier henholdsvis $-9\hbar$ og 0.
Hvordan kan vi generalisere til ψ_N^L? Vel, egenverdien til $H^0 = H_1^0 + H_2^0 + \cdots + H_N^0$ i tilstanden ψ_N^L kan ikke bli noe annet enn 0.
Egenverdien til $L_z = L_{1z} + L_{2z} + \cdots + L_{Nz}$ blir $-3N(N-1)\hbar/2$, det ser vi ved å telle potenser av alle faktorene $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Hver enkelt faktor $u_1, u_2, \ldots, u_N$ gir et bidrag $-\hbar$ til den totale banedreieimpulsen L_z.

2c) Dersom $N = 2$, og de to elektronene er i tilstanden ψ_{mn}, så er sannsynligheten for å observere et elektron i en-elektrontilstanden ψ_j lik 1 for $j = m$ og for $j = n$, og lik 0 for alle andre verdier av j. Den totale sannsynligheten, summert over alle verdier av j, er lik 2, fordi vi har to elektroner.
Formelt sett kan vi resonnere slik. To-partikkeltilstanden er

$$\psi_{mn}(1,2) = \alpha\psi_m(1)\psi_n(2) + \beta\psi_n(1)\psi_m(2)\ ,$$

der $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{2}$. Denne antisymmetriserte bølgefunksjonen er en superposisjon av tilstandene $\psi_m(1)\psi_n(2)$ (med elektron 1 i tilstanden ψ_m og elektron 2 i tilstanden ψ_n) og $\psi_n(1)\psi_m(2)$ (med elektron 1 i tilstanden ψ_n og elektron 2 i tilstanden ψ_m). Sannsynligheten for å finne elektron 1 i tilstanden ψ_m er da $|\alpha|^2 = 1/2$, sannsynligheten for å finne elektron 2 i tilstanden ψ_m er $|\beta|^2 = 1/2$, og disse to mulighetene ekskluderer hverandre. Sannsynligheten for å finne enten elektron 1 eller elektron 2 i tilstanden ψ_m er følgelig $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Tilsvarende er sannsynligheten for å finne enten elektron 1 eller elektron 2 i tilstanden ψ_n lik $|\beta|^2 + |\alpha|^2 = 1$. Og alle andre tilstander enn ψ_m og ψ_n er uaktuelle.
Dersom vi har to elektroner i Laughlin-tilstanden

$$\psi_2^L = \frac{1}{2}\,(-\psi_{03} + \sqrt{3}\,\psi_{12})\ ,$$

så er sannsynligheten $1/4$ for to-partikkeltilstanden ψ_{03} og $3/4$ for to-partikkeltilstanden ψ_{12}. Sannsynlighetene p_j for å finne et elektron i en-partikkeltilstandene ψ_j er da som følger:

$$p_0 = p_3 = \frac{1}{4}\ , \qquad p_1 = p_2 = \frac{3}{4}\ , \qquad p_4 = p_5 = \ldots = 0\ .$$

Dersom vi har tre elektroner i tilstanden ψ_{kmn}, er $p_j = 1$ for $j = k$, $j = m$ og $j = n$, og $p_j = 0$ for alle andre verdier av j.

Dersom vi har tre elektroner i Laughlin-tilstanden

$$\psi_3^L = \frac{1}{\sqrt{31}} \left(-\psi_{036} + \sqrt{6}\,\psi_{045} + \sqrt{3}\,\psi_{126} - \sqrt{6}\,\psi_{135} + \sqrt{15}\,\psi_{234}\right) ,$$

så har vi følgende sannsynligheter: $p_{036} = 1/31$ for trepartikkeltilstanden ψ_{036}, $p_{045} = 6/31$ for trepartikkeltilstanden ψ_{045}, og så videre. Vi har da at:

$$\begin{aligned}
p_0 &= p_{036} + p_{045} = \frac{7}{31} , \quad p_1 = p_{126} + p_{135} = \frac{9}{31} , \quad p_2 = p_{126} + p_{234} = \frac{18}{31} , \\
p_3 &= p_{036} + p_{135} + p_{234} = \frac{22}{31} , \quad p_4 = p_{045} + p_{234} = \frac{21}{31} , \quad p_5 = p_{045} + p_{135} = \frac{12}{31} , \\
p_6 &= p_{036} + p_{126} = \frac{4}{31} , \quad p_7 = p_8 = \ldots = 0 .
\end{aligned}$$

Merk at $p_0 + p_1 + \cdots + p_6 = 3$, som naturlig er når antallet elektroner er 3.
For Laughlin-bølgefunksjonen ψ_N^L med N stor vil det skje (formodentlig og grovt sett) at $p_j \approx 1/3$ for $j = 0, 1, 2, \ldots, 3N$, mens $p_j = 0$ for $j > 3N$. Det vil (trolig) alltid være kanteffekter for $j \approx 3N$.
Vi ser at $N = 2$ og $N = 3$ ikke er særlig gode tilnærminger til $N = \infty$, i den forstand at når sannsynligheten for en en-partikkeltilstand ikke er null, er den som regel ikke nær $1/3$. Grunnen til at vi ikke kan regne 2 og 3 som asymptotiske verdier av N, er tydeligvis at N-partikkelsystemet har en kant som har en viss bredde (kanten er det overgangsområdet, dvs. de verdiene av j, der $p_j \to 0$).
Dersom sannsynligheten er $1/3$ for å finne et elektron i en-elektrontilstanden ψ_j, for alle $j = 0, 1, 2, \ldots$, så er antallstettheten av elektroner konstant i hele planet:

$$\begin{aligned}
n(x, y) &= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j(x, y)|^2 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{j+1}}{\pi j!}\, |u|^{2j}\, \mathrm{e}^{-2\gamma|u|^2} = \frac{2\gamma}{3\pi}\, \mathrm{e}^{2\gamma|u|^2}\, \mathrm{e}^{-2\gamma|u|^2} \\
&= \frac{2\gamma}{3\pi} = \frac{m\omega}{6\pi\hbar} = \frac{eB}{3h} .
\end{aligned}$$

2d) Den egenskapen ved bølgefunksjonene ψ_N^L som gjør at Coulomb-energien er liten i en slik tilstand, er at den gjennomsnittlige avstanden mellom elektronene er stor.
Forventningsverdien av Coulomb-energien er

$$E_C = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \int \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}y_i\, \mathrm{d}x_j\, \mathrm{d}y_j\; \frac{|\psi_N^L|^2}{4\pi\epsilon_0\, |u_i - u_j|} .$$

Absoluttvadratet av bølgefunksjonen inneholder faktoren $|u_i - u_j|^6$, som sørger for at Coulomb-frastøtningen bidrar lite til energien.

3a) Betingelsen for at $\vec{A}(\vec{r})$ er en hermitesk operator, er at

$$(\vec{A}(\vec{r}))^\dagger = \vec{A}(\vec{r}) .$$

Når vi bruker Fourier-rekkeutviklingen, har vi at

$$(\vec{A}(\vec{r}))^\dagger = \sum_{\vec{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\, (\vec{A}_{\vec{k}})^\dagger = \sum_{\vec{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\, (\vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger .$$

Betingelsen på Fourier-komponentene er derfor at

$$(\vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger = \vec{A}_{\vec{k}}\ .$$

Tilsvarende betingelser gjelder for $\vec{B}(\vec{r})$ og $\vec{E}(\vec{r})$.
Betingelsen for Fourier-komponentene av $\vec{A}(\vec{r})$ er lett å verifisere:

$$\begin{aligned}
(\vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger &= \left(\sum_{\lambda=1}^{2} \vec{e}_{-\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck\mathcal{V}}} \left(a_{-\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\right)\right)^\dagger \\
&= \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{e}_{-\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck\mathcal{V}}} \left(a^\dagger_{-\vec{k},\lambda} + a_{\vec{k},\lambda}\right) = \vec{A}_{\vec{k}}\ .
\end{aligned}$$

Vi antar at polarisasjonsvektorene $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}$ er reelle, og at $\vec{e}_{-\vec{k},\lambda} = \vec{e}_{\vec{k},\lambda}$.
At $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ er hermitesk, følger direkte av at $\vec{A}(\vec{r})$ er hermitesk, ettersom ∇ er reell.
Vi kan også verifisere betingelsen på Fourier-komponentene av $\vec{B}(\vec{r})$, at

$$(\vec{B}_{-\vec{k}})^\dagger = (-\mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger = \mathrm{i}\vec{k} \times (\vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}} = \vec{B}_{\vec{k}}\ .$$

Endelig verifiserer vi betingelsen på Fourier-komponentene av $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}
(\vec{E}_{-\vec{k}})^\dagger &= \left(\mathrm{i}\sum_{\lambda=1}^{2} \vec{e}_{-\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} \left(a_{-\vec{k},\lambda} - a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\right)\right)^\dagger \\
&= -\mathrm{i}\sum_{\lambda=1}^{2} \vec{e}_{-\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} \left(a^\dagger_{-\vec{k},\lambda} - a_{\vec{k},\lambda}\right) = \vec{E}_{\vec{k}}\ .
\end{aligned}$$

3b) Vi har at

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{m}\cdot\vec{A}_{\vec{k}}\,,\,\vec{n}\cdot\vec{A}_{\vec{k}'}\right] \\
&= \left[\sum_{\lambda=1}^{2} \vec{m}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck\mathcal{V}}} \left(a_{\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{-\vec{k},\lambda}\right)\,,\, \sum_{\lambda'=1}^{2} \vec{n}\cdot\vec{e}_{\vec{k}',\lambda'} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck'\mathcal{V}}} \left(a_{\vec{k}',\lambda'} + a^\dagger_{-\vec{k}',\lambda'}\right)\right] \\
&= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2} (\vec{m}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda})\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_{\vec{k}',\lambda'})\,\frac{\hbar}{2\epsilon_0 c\sqrt{kk'}\mathcal{V}} \left[a_{\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{-\vec{k},\lambda}\,,\, a_{\vec{k}',\lambda'} + a^\dagger_{-\vec{k}',\lambda'}\right] \\
&= 0\ ,
\end{aligned}$$

fordi

$$\begin{aligned}
\left[a_{\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{-\vec{k},\lambda}\,,\, a_{\vec{k}',\lambda'} + a^\dagger_{-\vec{k}',\lambda'}\right] &= \left[a_{\vec{k},\lambda}\,,\, a^\dagger_{-\vec{k}',\lambda'}\right] + \left[a^\dagger_{-\vec{k},\lambda}\,,\, a_{\vec{k}',\lambda'}\right] \\
&= \delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\,\delta_{\lambda,\lambda'} - \delta_{-\vec{k},\vec{k}'}\,\delta_{\lambda,\lambda'} = 0\ .
\end{aligned}$$

3c) Vi har at

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{m}\cdot\vec{E}_{\vec{k}}\,,\,\vec{n}\cdot\vec{A}_{\vec{k}'}\right]\\
&=\left[\mathrm{i}\sum_{\lambda=1}^{2}\vec{m}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0\mathcal{V}}}\left(a_{\vec{k},\lambda}-a^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda}\right)\,,\,\sum_{\lambda'=1}^{2}\vec{n}\cdot\vec{e}_{\vec{k}',\lambda'}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck'\mathcal{V}}}\left(a_{\vec{k}',\lambda'}+a^{\dagger}_{-\vec{k}',\lambda'}\right)\right]\\
&=\mathrm{i}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2}(\vec{m}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda})\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_{\vec{k}',\lambda'})\,\frac{\hbar\sqrt{k}}{2\epsilon_0\sqrt{k'}\mathcal{V}}\left[a_{\vec{k},\lambda}-a^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda}\,,\,a_{\vec{k}',\lambda'}+a^{\dagger}_{-\vec{k}',\lambda'}\right]\\
&=\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\,\frac{\mathrm{i}\hbar}{\epsilon_0\mathcal{V}}\sum_{\lambda=1}^{2}(\vec{m}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda})\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_{-\vec{k},\lambda})\;,
\end{aligned}$$

fordi

$$\left[a_{\vec{k},\lambda}-a^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda}\,,\,a_{\vec{k}',\lambda'}+a^{\dagger}_{-\vec{k}',\lambda'}\right]=\left[a_{\vec{k},\lambda}\,,\,a^{\dagger}_{-\vec{k}',\lambda'}\right]-\left[a^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda}\,,\,a_{\vec{k}',\lambda'}\right]=2\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\,\delta_{\lambda,\lambda'}\;.$$

Vi kan bearbeide resultatet vårt litt mer, ved å bruke at $\vec{e}_{-\vec{k},\lambda}=\vec{e}_{\vec{k},\lambda}$, og skrive f.eks.

$$\vec{n}=\vec{k}\,\frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{k^2}+\sum_{\lambda=1}^{2}\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda})\;,$$

idet vi bruker at $\vec{k}/k$, $\vec{e}_{\vec{k},1}$ og $\vec{e}_{\vec{k},2}$ er tre ortogonale enhetsvektorer. Det gir at

$$\sum_{\lambda=1}^{2}(\vec{m}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda})\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_{-\vec{k},\lambda})=\vec{m}\cdot\sum_{\lambda=1}^{2}\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda})=\vec{m}\cdot\left(\vec{n}-\vec{k}\,\frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{k^2}\right)=\vec{m}\cdot\vec{n}-\frac{(\vec{m}\cdot\vec{k})(\vec{n}\cdot\vec{k})}{k^2}\;.$$

For å beregne kommutatoren $\left[\vec{m}\cdot\vec{E}_{\vec{k}}\,,\,\vec{n}\cdot\vec{B}_{\vec{k}'}\right]$ kan vi bruke at

$$\vec{n}\cdot\vec{B}_{\vec{k}'}=\mathrm{i}\,\vec{n}\cdot(\vec{k}'\times\vec{A}_{\vec{k}'})=\mathrm{i}\,(\vec{n}\times\vec{k}')\cdot\vec{A}_{\vec{k}'}\;.$$

Av denne relasjonen følger at

$$\begin{aligned}
\left[\vec{m}\cdot\vec{E}_{\vec{k}}\,,\,\vec{n}\cdot\vec{B}_{\vec{k}'}\right]&=\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\,\frac{\mathrm{i}\hbar}{\epsilon_0\mathcal{V}}\sum_{\lambda=1}^{2}(\vec{m}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda})\,(\mathrm{i}\,(\vec{n}\times(-\vec{k}))\cdot\vec{e}_{-\vec{k},\lambda})\\
&=\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\,\frac{\hbar}{\epsilon_0\mathcal{V}}\sum_{\lambda=1}^{2}(\vec{m}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda})\,((\vec{n}\times\vec{k})\cdot\vec{e}_{-\vec{k},\lambda})\\
&=\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\,\frac{\hbar}{\epsilon_0\mathcal{V}}\,\vec{m}\cdot(\vec{n}\times\vec{k})\\
&=\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\,\frac{\hbar}{\epsilon_0\mathcal{V}}\,(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{k}\;.
\end{aligned}$$

Vi kan si uten videre at

$$\left[\vec{m}\cdot\vec{B}_{\vec{k}}\,,\,\vec{n}\cdot\vec{A}_{\vec{k}'}\right]=0\;,$$

siden $\vec{B}_{\vec{k}}=\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}}$, og siden vi har vist ovenfor at alle Fourier-komponentene $\vec{A}_{\vec{k}}$ kommuterer innbyrdes.

Det er ikke mulig å kvantisere alle Fourier-komponentene av det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ samtidig med alle Fourier-komponentene av den magntiske flukstettheten $\vec{B}(\vec{r})$, ettersom de ikke alltid kommuterer med hverandre. Det er altså ikke mulig å lage et elektromagnetisk felt med eksakt spesifiserte verdier overalt av både det elektriske feltet og den magnetiske flukstettheten.