Løysingsframlegg/skisse Eksamen TFY 4210 Anvendt Kvantemekanikk 12/6-2010

June 20, 2010

Oppgave 1

1) Dei partielt deriverte vi treng er

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)} &= D^\mu\Phi \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*} &= -m^2\Phi - iqA_\mu D^\mu\Phi\ .\end{aligned}$$

Bevegelseslikninga er

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*}\ .$$

Ved innsetting får vi

$$\partial_\mu D^\mu\Phi = -m^2\Phi - iqA_\mu D^\mu\Phi\ ,$$

eller

$$\underline{\underline{(D_\mu D^\mu + m^2)\Phi = 0}}\ .$$

2) Dei elektriske og magnetiske felta er gjevne ved

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\ , \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}\ .$$

Sidan $A^0 = \Phi = 0$ og $\mathbf{A}$ er tidsuavhengig, er $\mathbf{E} = 0$. Magnetfeltet er

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= \underline{\underline{B\mathbf{k}}}\ .\end{aligned}$$

3) Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} &= D^0\Phi^* \ , \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi^*)} &= D^0\Phi \ .\end{aligned}$$

Bidraget til Hamiltontettheiten frå skalarfeltet er

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \dot{\Phi}D^0\Phi^* + \dot{\Phi}^*D^0\Phi - (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) + m^2\Phi^*\Phi \\ &= (\partial_0\Phi^*)(\partial_0\Phi) + [(\partial_x - iqBy)\Phi^*][(\partial_x + iqBy)\Phi] + (\partial_y\Phi^*)(\partial_y\Phi) + m^2\Phi^*\Phi \ .\end{aligned}$$

der vi har brukt at $D_0 = \partial_0$ og $D_x = \partial_x$. Frå "nyttige formlar" på side fire i oppgåveteksten har vi $H_{\rm Maxwell} = (E^2 + B^2)/2$. Med $\mathbf{E} = 0$, blir Hamiltontettheiten

$$\mathcal{H} = \underline{\underline{(\partial_0\Phi^*)(\partial_0\Phi) + [(\partial_x - iqBy)\Phi^*][(\partial_x + iqBy)\Phi] + (\partial_y\Phi^*)(\partial_y\Phi) + m^2\Phi^*\Phi + B^2/2}} \ .$$

Ja, Hamiltontettheiten er Lorentzinvariant.

4) Løysinga til Klein-Gordon likninga kan skrivast

$$\underline{\underline{\Phi(\mathbf{x}, t) = e^{-i(Et - p_x x)} f(y)}} \ .$$

Ved innsetting av dette uttrykket i Klein-Gordon likninga finn ein

$$\underline{\underline{\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - E^2 + m^2 + (p_x - qBy)^2\right] f(y) = 0}} \ .$$

Dette kan vi skrive som

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2 f(y)}{dy^2} + \frac{(p_x - qBy)^2}{2m} f(y) = \frac{E^2 - m^2}{2m} f(y) \ .$$

Dette er likninga for ein harmonisk oscillator med sentrum i p_x/qB, med frekvens $\omega^2 = q^2B^2/m^2$ og energi $(E^2 - m^2)/2m$. Sidan energien til ein oscillator er$E_n = (1/2 + n)\omega$, finn ein

$$\underline{\underline{E^2 = m^2 + qB(2n + 1)}} \ .$$

Oppgave 2

1) Ved innsetting finn vi

$$\begin{aligned}[a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{k}}] &= [u_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}} b^\dagger_{-\mathbf{p}}, u_{\mathbf{k}} b^\dagger_{\mathbf{k}} + v_{-\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}] \\ &= (u_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{k}} - v_{-\mathbf{p}} v_{-\mathbf{k}})[b_{\mathbf{p}}, b^\dagger_{\mathbf{k}}] \\ &= \underline{\underline{(u_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{k}} - v_{-\mathbf{p}} v_{-\mathbf{k}})\delta_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}} \ .\end{aligned}$$

Altså $u_{\mathbf{p}}^2 - v_{-\mathbf{p}}^2 = 1$ og null elles.

2) Ved innsetting finn vi

$$\begin{aligned}\langle a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \rangle &= \langle (u_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}}^\dagger)(u_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger + v_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}}) \rangle \\ &= \underline{\underline{u_{\mathbf{p}}^2}} \; ,\end{aligned}$$

der vi har brukt at $b_{\mathbf{p}}$ annihilerer kvasipartikkelvakuumet, $b_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$.

3) For ein ideel Bose gas ved $T = 0$ er alle partiklane i $\mathbf{p} = 0$ tilstanden. Dersom ein inkluderer vekselverknader er kondensattettheiten mindre enn den totale tettheiten også ved $T = 0$. Det tyder at ein del av partiklane blir "sparka ut" av grunntilstanden når ein inkluderer vekselverknader. For ein svakt vekselverkande Bose gass har vi

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho' \\ &= \rho_0 \left[1 + \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\rho_0 a^3}{\pi}} \right] \; ,\end{aligned}$$

der a spreiingslengda, ρ_0 er kondensattettheiten og ρ er den totale tettheiten. Merk: for å få full pott, krev ein ikkje formlane over sidan ein bad om ei kort forklaring.

Oppgave 3

1) Dei partielt deriverte av $\mathcal{L}$ er

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\sigma}} &= -\partial_0\phi - \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 + \mu - g(\rho_0 + \tilde{\sigma}) \; , \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\nabla\tilde{\sigma})} &= -\frac{1}{4m\rho_0}\nabla\tilde{\sigma} \; .\end{aligned}$$

Bevegelseslikninga er

$$\partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\tilde{\sigma})} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\nabla\tilde{\sigma})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\sigma}}$$

Dersom vi bruker $\mu = g\rho_0$, kan vi skrive dette som

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{g}\left[\partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 - \frac{g}{4m\rho_0}\nabla^2\tilde{\sigma} \right] \; .$$

og dimed

$$A = \underline{\underline{\frac{g}{4m\rho_0}}} \; .$$

2) Innsetting i verknaden gjev

$$S = \int dt\, d^3x \left\{ -\rho_0 \left[\partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 \right] + \frac{1}{2g}\left[\partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 \right]^2 + ... \right\} \; .$$

Altså er

$$\begin{aligned} B &= \underline{\underline{-\rho_0}}\,, \\ C &= \underline{\underline{1/2g}}\,. \end{aligned}$$

Merk at det første leddet $-\rho_0\partial_0\phi$ er ein totalderivert.

3) Kvart ledd i Lagrangetettheiten kan skrivast som ein potens av

$$\partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2$$

Ein Galileitransformasjon gjev

$$\begin{aligned} \partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 &\rightarrow \partial_0\phi - \mathbf{v}\cdot\nabla\phi - \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2m}(\nabla\phi + m\mathbf{v})^2 \\ &= \partial_0\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2\,. \end{aligned}$$

Altså er denne kombinasjonen og $\mathcal{L}$ invariant under Galileitransformasjonar.

4) Propagatoren G er inversen til dei ledda i $\mathcal{L}$ som er kvadratiske i kvantefluktuasjonane. Dette gjev

$$\begin{aligned} G &= \underline{\underline{\frac{i}{2Cp_0^2 + \frac{B}{m}\mathbf{p}^2}}} \\ &= \underline{\underline{\frac{i}{2gp_0^2 - \frac{\rho_0}{m}\mathbf{p}^2}}}\,. \end{aligned}$$

5) Dispersionsrelasjonen er gjeven ved polane til propagatoren. Dette gjev

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{p}) &= \sqrt{-\frac{B}{2mC}}|\mathbf{p}| \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{g\rho_0}{m}}|\mathbf{p}|}}\,. \end{aligned}$$

Dispersjonsrelasjonen er lineær og lik Bogoliubov-spekteret for lange bølgjelengder. Dette er lydbølgjer og vi kan identifisere dei langbølgja eksitasjonane i Bosekondensatet med fluktuasjonar i fasen.