Løysingsframlegg/skisse Eksamen TFY 4210 Kvanteteorien for mangepartikkelsystem 24. mai 2011

May 24, 2011

Oppgave 1

1) Ein global fasetransformasjon er på forma

$$\psi \to \psi e^{i\alpha} \qquad \psi^\dagger \to \psi^\dagger e^{-i\alpha}\,, \tag{1}$$

der α er ein konstant. Invariansen følgjer ved innsetting: Sidan ψ og $\psi^\dagger$ opptrer i par og α er uavhengig av rom og tid vil fasene kansellere i alle ledd. Lagrangefunksjonen er i tillegg invariant under Lorentztranformasjonar.

2) Det elektriske feltet er

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \underline{\underline{0}}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

sidan $A^0 = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$. Vidare har vi

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\,.$$

Dette gjev

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Bx & 0 \end{vmatrix}\,. \\ &= \underline{\underline{\underline{B\mathbf{k}}}}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Sidan Hamiltonfunksjonen inneheld eit ledd som avheng av x og $p_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$, vil $[H, p_x] \neq 0$. Liknande argument gjev at $[H, p_y] = 0$.

3) Dirac-likninga er

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi \quad = \quad 0\ . \tag{4}$$

Dersom vi bruker $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^1 = i\sigma_2$, and $\gamma^2 = -i\sigma_1$ og $A^\mu = (0, 0, Bx)$, får vi likning (3) i oppgåvesettet. Ved innsetting av ψ kan vi skrive likningssettet

$$(E - m)f + \left[i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - iqBx)\right] g(x) \quad = \quad 0\ , \tag{5}$$

$$\left[-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - iqBx)\right] f(x) - (E + m)g(x) \quad = \quad 0\ . \tag{6}$$

Vi løyser den andre likninga med omsyn på $g(x)$ og substituerer resultatet i den første likninga. Litt omstokking gjev då

$$\left[-\partial_x^2 + (qB)^2\left(x - \frac{k}{qB}\right)^2\right] f(x) \quad = \quad (E^2 - m^2 + qB)f(x)\ . \tag{7}$$

Dette er likninga for ein harmonisk oscillator med sentrum i $x = k/qB$, dersom vi deler på $2m$ og identifiserer $\frac{1}{2}m\omega^2 \leftrightarrow (qB)^2/2m$ og $E \leftrightarrow (E^2 - m^2 + qB)/2m$. Sidan spekteret til oscillatoren er $E_n = \omega(1/2 + n)$, finn vi

$$\frac{E_n^2 - m^2 + qB}{2m} \quad = \quad \frac{qB}{m}(n + 1/2)\ , \tag{8}$$

eller

$$\underline{\underline{E_n^2 = m^2 + 2qBn\ .}} \tag{9}$$

Oppgave 2

1) Nei, Lagrangetettheiten er *ikkje* Lorentzinvariant. Dei kovariant deriverte som inneheld μ bryt symmetrien mellom tid og rom. Vi har imidlertid rotasjonsinvarians i rommet. Den fysiske forklaringa er at $\mu \neq$ tyder at vi har materie tilstades og kvilesystemet til materien er spesielt (føretrekt) inertialsystem.

2) Verknaden S er gjeve ved

$$S \quad = \quad \int d^4x\mathcal{L}\ . \tag{10}$$

Den klassiske verknaden får ein ved å ignorere alle kvantefelt. For konstant ϕ_0 gjev dette

$$S \quad = \quad \int d^4x\left[-\frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\phi_0^2 - \frac{\lambda}{24}\phi_0^4\right]\ . \tag{11}$$

Sidan $S = \int d^4x\,[-V_0]$ får vi

$$V_0 \quad = \quad \underline{\underline{\frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\phi_0^2 + \frac{\lambda}{24}\phi_0^4\ .}} \tag{12}$$

3) Minimumspunkta for V_0 finnast ved å løyse likninga

$$\begin{aligned}\frac{dV_0}{d\phi_0} &= \phi_0(m^2-\mu^2)+\frac{\lambda}{6}\phi_0^3 \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Dette gjev

$$\phi_0 = 0\,, \qquad\qquad \phi_0 = \sqrt{\frac{6(\mu^2-m^2)}{\lambda}}\,. \tag{14}$$

Dersom $\mu^2 < m^2$ finst det berre det trivielle ekstremalpunktet $\phi_0 = 0$. Dersom $\mu^2 > m^2$ er $\phi_0 = 0$ eit lokalt maksimum og $\phi_0 = \sqrt{\frac{6(\mu^2-m^2)}{\lambda}}$ er eit lokalt minimum. Dette tilsvarer eit potensial som ein meksikansk hatt.

4) Dispersjonsrelasjonen er gjeve ved nullpunkta til determinanten til matrisa gjeve i oppgåva. I impulsrommet er dette

$$D = \begin{pmatrix} -p^2+M_1^2 & -2i\mu p_0 \\ 2i\mu p_0 & -p^2+M_2^2 \end{pmatrix}\,. \tag{15}$$

Dispersjonsrelasjonen finn ein ved å rekne ut $\det D = 0$. Vi må skilje mellom $\phi = 0$ og $\phi_0 \neq 0$.
I det første tilfellet gjev $\det D = 0$

$$(p^2-M_1^2)^2 - 4\mu^2p_0^2 = 0\,, \tag{16}$$

der vi har $M_1^2 = M_2^2 = m^2-\mu^2$. Vi får da

$$p_0^4 - 2p_0^2(\mathbf{p}^2+m^2+\mu^2) - (\mathbf{p}^2+M_1^2)^2 = 0 \tag{17}$$

eller

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \mathbf{p}^2+m^2+\mu^2 \pm 2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2} \\ &= \left(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\pm\mu\right)^2\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Dei positive løysingane er da

$$p_0 = \underline{\underline{\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\pm\mu}}\,. \tag{19}$$

Dette er dispersjonsrelasjonane vi har utleia på førelesningane og gjeld for $m^2 > \mu^2$.
For tilfellet $\phi_0 \neq 0$, det vil seie for $\mu^2 > m^2$ gjev $\det D = 0$

$$p^2(p^2-M_1^2) - 4\mu^2p_0^2 = 0\,, \tag{20}$$

der vi har nytta at $M_2^2 = 0$ i det klassiske minimumet. Dette gjev

$$p_0^4 - p_0^2(4\mu^2+2\mathbf{p}^2+M_1^2) + \mathbf{p}^2(\mathbf{p}^2+M_1^2) = 0\,. \tag{21}$$

Denne likninga løyser vi med omsyn på p_0^2 og nyttar at $M_1^2 = 2(\mu^2-m^2)$ i klassisk minimum. Dette gjev

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \mathbf{p}^2+3\mu^2-m^2 \pm \sqrt{(3\mu^2-m^2)^2+4\mu^2\mathbf{p}^2} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{p}^2+3\mu^2-m^2 \pm (3\mu^2-m^2)\sqrt{1+\frac{4\mu^2\mathbf{p}^2}{(3\mu^2-m^2)^2}}}}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

For små $\mathbf{p}^2$ kan vi rekkeutvikle og får

$$p_0^2 \approx \underline{\underline{p^2 + 6\mu^2 - 2m^2}}\,, \qquad p_0^2 \approx \underline{\underline{\frac{\mu^2 - m^2}{3\mu^2 - m^2}\mathbf{p}^2}}\,. \tag{23}$$

Den andre dispersjonsrelasjonen er lineær for små $|\mathbf{p}|$:

$$p_0 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\mu^2 - m^2}{3\mu^2 - m^2}}|\mathbf{p}|}}\,. \tag{24}$$

Vi har såleis eit Goldstone boson for $\mu^2 > m^2$. Dette er i samsvar med Goldstones teorem sidan rotasjonssymmetrien blir broten av $\phi_0 \neq 0$. Massen til den andre moden er $2\mu^2 + 2M_1^2 > 0$.

Oppgave 3

1) Det første leddet er det klassiske bidraget til den frie energien og det andre leddet er første kvantekorreksjon ("one-loop correction"). Den frie energien kan skrivast

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} + \frac{1}{4m}\int \frac{d^2p}{(\pi)^2} p\sqrt{p^2 + y^2}\,, \tag{25}$$

der $y = 4m\mu$. Vi bruker formelen gjeve i oppgåvesettet og få

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} - \frac{m\mu^2}{8\pi}\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\frac{\Lambda^2}{\mu} + C\right]\,. \tag{26}$$

Dersom vi i det første leddet substituerer $g \to g + \delta$ og rekkeutviklar til første orden i δg får vi

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} + \frac{\mu^2}{2g^2}\delta g - \frac{m\mu^2}{8\pi}\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\frac{\Lambda^2}{\mu} + C\right]\,. \tag{27}$$

For å kansellere polen i ϵ, må ein velje $\delta g = mg^2/4\pi\epsilon$. Den renormaliserte frie energien blir då

$$\mathcal{F} = \underline{\underline{-\frac{\mu^2}{2g} - \frac{m\mu^2}{8\pi}\left[\ln\frac{\Lambda^2}{\mu} + C\right]}}\,. \tag{28}$$

2) Frå formelsamlinga har vi

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu} \\ &= \underline{\underline{\frac{\mu}{g}\left[1 + \frac{mg}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{\mu} + K\right)\right]}}\,, \end{aligned} \tag{29}$$

der $K = C - \frac{1}{2}$. Vi inverterer likninga over til første orden i g. Dette gjev

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{g\rho}{1 + \frac{mg}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{g\rho} + K\right)} \\ &\approx g\rho\left[1 - \frac{mg}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{g\rho} + K\right)\right] , \end{aligned} \tag{30}$$

der vi i korreksjonsleddet har brukt resultatet $\mu = g\rho$ som er korrekt til leiande orden. Innsetting i uttrykket $\mathcal{E} = \mathcal{F} + \mu\rho$, gjev då

$$\mathcal{E} = \underline{\underline{\frac{1}{2}g\rho^2\left[1 - \frac{gm}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{g\rho} + C\right)\right]}} , \tag{31}$$

der vi har eliminert μ til fordel for $g\rho$ sidan $\mathcal{E}$ er ein funksjon av ρ.

3) Loopintegral som er divergente er kutta av med ein ultravolet cutoff Λ. Det tyder at vi ignorerer bidrag til integrala som impuls større enn Λ. Dimensjonell regularisering er ein gaugeinvariant regulator. Logaritmiske divergensar dukkar opp som polar i ϵ medan potensdivergensar automatisk er eliminert.