



NTNU

Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi

Institutt for Fysikk

Eksamen TFY4215/FY1006 Innføring i kvantefysikk Vår 2014

Faglærer: Professor Jens O. Andersen

Institutt for Fysikk, NTNU

Kontakt på eksamen: Jon Andreas Støvneng

Telefon: 45 45 55 33

Mandag 26. mai 2014

kl. 09.00-13.00

Tillatte hjelpemiddel:

Godkjend kalkulator

Rottmann: Matematisk Formelsamling

Rottmann: Matematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter: navn og symboler

Oppgavesettet er på fire sider. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi studere ein partikkel med masse m som bevegar seg på ein sirkel i xy -planet med konstant radius R . Vi bruker vinkelen ϕ til å spesifisere posisjonen til partikkelen. Ein tidsuavhengig bølgefunksjon skriv vi som $\psi(\phi)$.

a) Vis at dreieimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}$ for systemet kan skrivast som

$$\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar\mathbf{e}_z\frac{d}{d\phi}, \quad (1)$$

der \mathbf{e}_z er einingsvektoren i z -retninga i sylinderkoordinatar.

b) Finn Hamiltonoperatoren \hat{H} for systemet uttrykt ved hjelp av dreieimpulsoperatoren.

c) Vis eksplisitt at Hamiltonoperatoren i b) kommuterer med $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{d}{d\phi}$, det vil seie vis at

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0. \quad (2)$$

d) Finn dei simultane ortonormerte eigenfunksjonane for operatorane \hat{L}_z og \hat{H} , og dei tilhøyrande eigenverdiane l_z og E . Kva er degenerasjonsgraden for dei ulike energinivåa? Korleis heng dette saman med resultatet frå forelesningane som seier at ein-dimensjonale system ikkje er degenererte?

e) Er eigenfunksjonane for Hamiltonoperatoren \hat{H} og dreieimpulsoperatoren \hat{L}_z du fann i d) også eigenfunksjonar for paritetsoperatoren \hat{P} ? Forklar resultatet.

Oppgåve 2

Vi skal i denne oppgåva studere ein tidsavhengig bølgefunksjon til den harmoniske oscillatoren i ein dimensjon. Partikkelen har masse m og oscillatoren har frekvens ω . For $t = 0$ har vi preparert systemet slik at den normerte bølgefunksjonen er

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2\hbar}m\omega(x-x_0)^2}, \quad (3)$$

der $x_0 > 0$ er ein konstant.

a) Tidsutviklinga til $\Psi(x, t)$ er gjeven ved den tidsavhengige Schrödingerlikninga,

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(x, t), \quad (4)$$

der \hat{H} er Hamiltonoperatoren til den harmoniske oscillatoren. Den normerte løysinga til likning (4) med initialkravet (3) er gjeven ved

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}m\omega x_0^2\right] \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}m\omega x_0^2 e^{-2i\omega t}\right] \exp\left[\frac{m\omega x_0 x}{\hbar} e^{-i\omega t}\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2}i\omega t\right] \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}m\omega x^2\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Dette treng du ikkje vise. Vis at

$$|\Psi(x, t)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-m\omega(x-x_0 \cos(\omega t))^2/\hbar} . \quad (6)$$

b) Bruk resultatet i a) til å vise at middelveidien til posisjonsoperatoren \hat{x} i tilstanden $\Psi(x, t)$ er

$$\langle x \rangle_{\Psi(x, t)} = x_0 \cos(\omega t) . \quad (7)$$

c) Middelveidien til impulsoperatoren \hat{p} i tilstanden $\Psi(x, t)$ er

$$\langle p \rangle_{\Psi(x, t)} = A \sin(\omega t) , \quad (8)$$

der A er ein konstant. Finn konstanten A .

Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi studere den isotrope harmoniske oscillatoren i tre dimensjonar. Vi bruker kulekoordinatar r , θ og ϕ . Hamiltonoperatoren er

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2} + V(r) . \quad (9)$$

der potensialet er $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ og $\hat{\mathbf{L}}$ er dreieimpulsoperatoren. Eigenfunksjonane til \hat{H} er på forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi) , \quad (10)$$

der $Y_{lm}(\theta, \phi)$ er ein kulefunksjon og $R(r)$ er ein radialfunksjon. Vi skriv nå $R(r) = v(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ der $x = r\sqrt{m\omega/\hbar}$ er dimensjonslaus.

a) Utlei radiallykninga for $v(x)$.

b) Bruk potensrekkmjetoden for $v(x)$ til å finne ein rekursjonsformel for koeffisientane i rekkja i spesialtilfellet $l = 0$.

c) Forklar kvifor ein ventar at grunntilstanden for oscillatoren har $l = 0$. Finn grunntilstandsenergien E_0 og det tilhøyrande polynomet $v_0(x)$ (Du treng berre å finne $v_0(x)$ opp til ein normeringskonstant).

Oppgåve 4

Denne oppgåva er blanda drops, det vil seie fire spørsmål som er uavhengig av kvarandre.

- a) Forklar kort omgrepet kvantemekanisk tunnelering.
- b) Forklar kort Bohr-modellen for hydrogenatomet. Kva var den største suksessen til Bohr-modellen? Kva er tolkninga av Bohr-radien a_0 i kvantemekanikken?
- c) Forklar kort det fysiske innhaldet i relasjonen $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0$.
- d) Ein partikkel bevegar seg i tre dimensjonar i eit potensial $V(\mathbf{r})$. Ehrenfests teorem for denne partikkelen kan skrivast som

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{p} \rangle = -\langle \nabla V(\mathbf{r}) \rangle. \quad (12)$$

Forklar kort det fysiske innhaldet i Ehrenfests teorem.

Nyttige formlar:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (13)$$