NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Kontinuasjonseksamen TFY4215/FY1006 Innføring i kvantefysikk august 2014

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73 59 31 31

7. august 2014

Tillatne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter: navn og symboler

Oppgåvesettet er på fire sider. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi studere bundne tilstandar i ein romleg dimensjon. Ein partikkel med masse m bevegar seg i potensialet

$$V(x) = -\beta\delta(x-L) - \beta\delta(x+L) \,, \tag{1}$$

der $\beta > 0$ er styrken til potensialet og $L > 0$ er avstanden frå origo til δ-funksjonane. Sjå figur 1. Bølgjefunksjonen til grunntilstanden er symm-

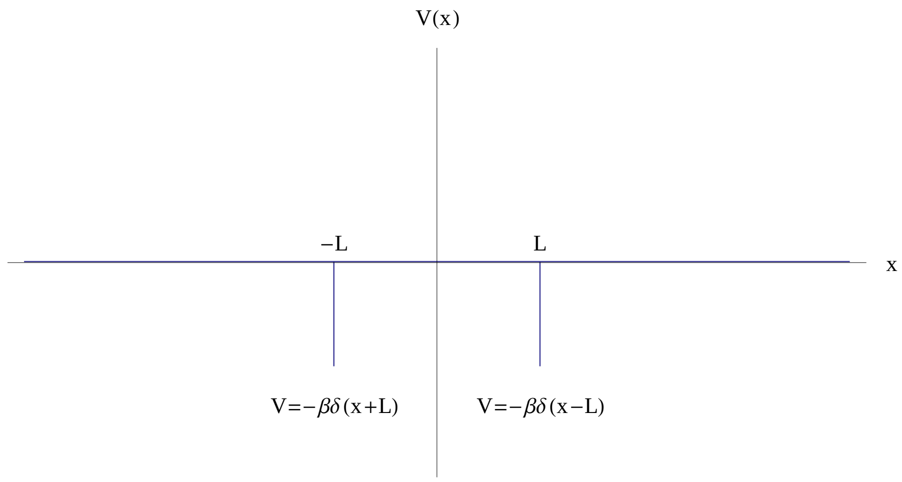

Figure 1: Potensialet $V(x)$ i oppgåve 1.

metrisk og kan skrivast på forma

$$\psi_0(x) \quad = \quad \begin{cases} Ae^{Kx} \ , & x < -L \ , \\ B\cosh(Kx) \ , & |x| < L \ , \\ Ce^{-Kx} \ , & x > L \ , \end{cases} \tag{2}$$

der A, B, C og K er konstantar. Du kan velje fasen til bølgjefunksjonen slik at A, B og C er reelle.

a) Bruk symmetrien til bølgjefunksjonen $\psi_0(x)$ til å finne samanhengen mellom konstantane A og C.

b) Finn samanhengen mellom grunntilstandsenergien E_0 og konstanten K.

c) Bruk kontinuiteten til bølgjefunksjonen $\psi_0(x)$ i $x = L$ til å vise at

$$B\cosh(KL) \quad = \quad Ce^{-KL} \ . \tag{3}$$

Skisser bølgjefunksjonen.

d) Bruk diskontinuiteten til $\psi_0'(x)$ i $x = L$ til å vise at

$$BK\sinh(KL) + CKe^{-KL} = \frac{2m\beta}{\hbar^2}Ce^{-KL} \ . \tag{4}$$

e) Vis at K tilfredsstiller den transcendentale likninga

$$e^{-2KL} \quad = \quad \frac{\hbar^2 K}{\beta m} - 1 \ , \tag{5}$$

og forklar kvifor likning (5) har ei og berre ei løysing.

f) Bølgjefunksjonen til fyrste eksiterte tilstand er antisymmmetrisk og kan skrivast på forma

$$\psi_1(x) \;=\; \begin{cases} Ae^{Kx} \,, & x < -L \,, \\ B\sinh(Kx) \,, & |x| < L \,, \\ Ce^{-Kx} \,, & x > L \,, \end{cases} \,, \tag{6}$$

der A, B, C og K er (nye) konstantar. Du kan velje fasen til bølgjefunksjonen slik at A, B og C er reelle. Finn samanhengen mellom konstantane A og C. Skisser bølgjefunksjonen.

g) Vis at det den antisymmetriske tilstanden eksisterer viss β er større enn ein kritisk verdi β_c og finn β_c.

Oppgåve 2

Vi skal studere eit potensial $V(x)$ i ein romleg dimensjon. Potensialet er gjeve ved

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0 \,, & x < 0 \,, & (\text{område I}) \,, \\ V_0 \,, & 0 < x < L \,, & (\text{område II}) \,, \\ \infty \,, & x > L \,, & (\text{område III}) \,, \end{cases} \,, \tag{7}$$

der $V_0 > 0$ er konstant. Sjå figur 2.

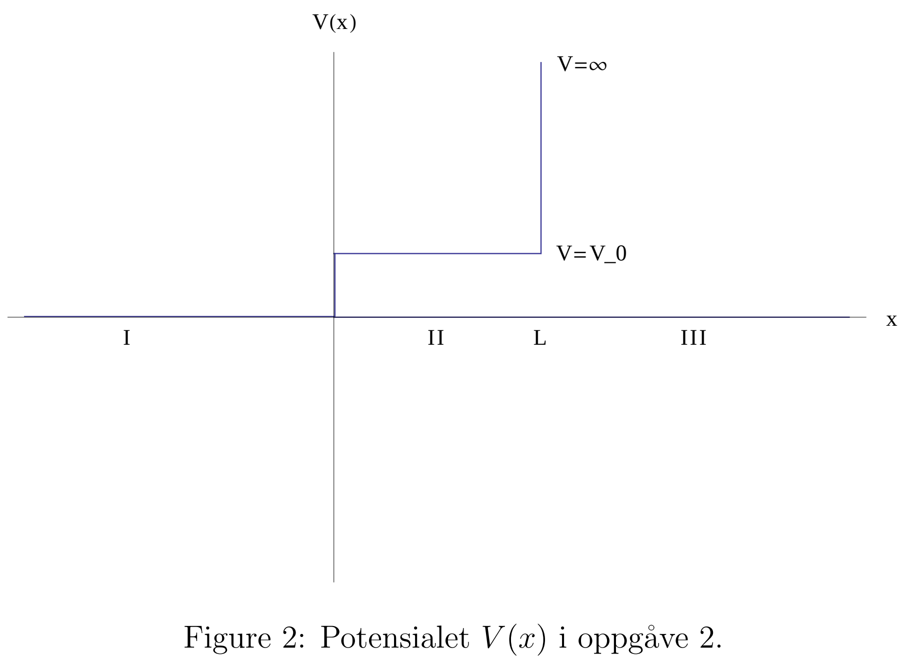

Figure 2: Potensialet $V(x)$ i oppgåve 2.

a) Det kjem inn partiklar med masse m og energi E frå venstre mot dette potensialet. Rekn ut refleksjonskoeffisienten R som funksjon av E.

Oppgåve 3

Denne oppgåva er blanda drops, det vil seie fire spørsmål som er uavhengig av kvarandre.

a) Vis at eigenverdiane til ein hermitesk operator $\hat{F}$ er reelle. La $\mathcal{H}$ vere Hilbertrommet av kvadratisk integrerbare funksjonar på x-aksen. Er operatoren $\hat{F} = \frac{d}{dx}$ hermitesk på dette Hilbertrommet? Grunngjev svaret.

b) Forklar kort omgrepet kvantemekanisk tunnelering.

c) Forklar kort Bohr-modellen for hydrogenatomet. Kva var den største suksessen til Bohr-modellen? Kva er tolkninga av Bohr-radien a_0 i kvantemekanikken?

d) Er funksjonen $\psi(\theta, \phi) = \sin\theta$ eigenfunksjon til operatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$? Enn til operatoren $\hat{L}_z$?

Nyttige formlar:

$$\psi'(a^+) - \psi'(a^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(a) , \tag{8}$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] , \tag{9}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} . \tag{10}$$