



Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY4215/FY1006 Innføring i kvantefysikk Vår 2015

Faglærer: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Kontakt på eksamen: Jan Myrheim. Telefon: 90075172

Onsdag 27. mai 2015
kl. 09.00-13.00

Tillatte hjelpemiddel:

Godkjend kalkulator

Rottmann: Matematisk Formelsamling

Rottmann: Matematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter: navn og symboler

Oppgavesettet er på fire sider. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgave 1

I denne oppgåva skal vi studere bundne tilstandar til ein partikkel med masse m som bevegar seg i ein dimensjon der potensialet er gjeve ved

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq -a & \text{I} \\ \alpha\delta(x) & -a < x < a & \text{II} \\ \infty & x \geq a & \text{III} \end{cases}, \quad (1)$$

der α er ein reell konstant. Sjå figur ??.

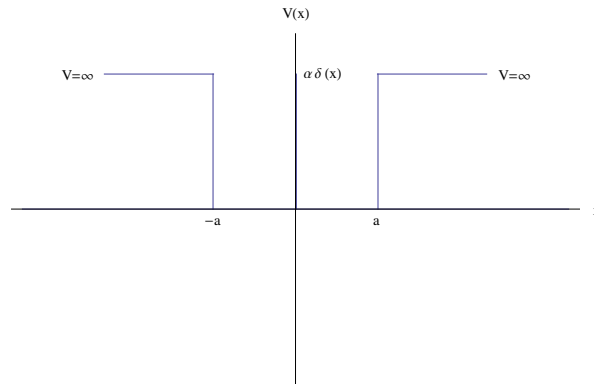


Figure 1: Potensialet $V(x)$ i oppgave 1. Her er $\alpha > 0$.

Vi skal først studere tilfellet der $\alpha > 0$. I dette tilfellet er $E > 0$.

a) Sidan potensialet $V(x)$ er symmetrisk, veit vi at eigetilstandane $\psi(x)$ til Hamiltonoperatoren \hat{H} kan veljast slik at dei er symmetriske eller antisymmetriske. La oss studere dei symmetriske bølgefunksjonane først. I området $0 < x < a$ kan ein skrive den mest generelle løysinga til Schrödingerlikninga som

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx, \quad (2)$$

der $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ og A og B er komplekse koeffisientar. Bruk symmetrien til $\psi(x)$ til å skrive ned den mest generelle løysinga til Schrödingerlikninga i området $-a < x < 0$.

b) Bruk randkravet i $x = a$ og kontinuitetsegenskapane til $\psi(x)$ i $x = 0$, til å vise at bølgetalet k tilfredsstillar den transcendentale likninga

$$\tan(ka) = -\beta(ka), \quad (3)$$

og uttrykk β ved hjelp av \hbar , m , α og a . Skisser den grafiske løysinga av (??).

c) Finn eit eksplisitt uttrykk for bølgetalet k i grensa $\beta \rightarrow 0$. Samanlikn dette med resultatet for bølgetalet som du kjenner for ein partikkel i boks. Finn eit eksplisitt uttrykk for bølgetalet k i grensa $\beta \rightarrow \infty$. Forklar dette resultatet.

d) Nå tar vi for oss dei antisymmetriske løysingane. Skriv ned den mest generelle løysinga til Schrödingerlikninga i dette tilfellet.

e) I dette tilfellet kan ein finne eit eksplisitt uttrykk for bølgetalet k og difor energien E . Finn dette uttrykket og samanlikn med energinivåa for ein partikkel i boks.

Vi skal nå sjå på tilfellet $\alpha < 0$. I dette tilfellet er $E_0 \leq 0$, der E_0 er grunntilstandsenergien.

f) Finn den normerte bølgefunksjonen $\psi_0(x)$ for grunntilstanden når $E_0 = 0$. Kva verdi av α svarer dette til?

g) Vi skal nå sjå på tilfellet der $E_0 < 0$. Skriv ned det mest generelle uttrykket for bølgefunksjonen til grunntilstanden for $-a < x < a$.

h) Finn ei transcendental likning for bølgetallet i analogi med likning (??). Skisser den grafiske løysinga.

i) Bevis at det ikkje finst eksiterte tilstandar med $E < 0$.

Oppgåve 2

a) Bølgefunksjonen $f(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$ er ein normert eigentilstand til operatorane $\hat{\mathbf{L}}^2$ og \hat{L}_z . Finn dei tilhøyrande eigenverdiane.

b) Dersom vi roterer denne bølgefunksjonen ein vinkel $\frac{\pi}{2}$ rundt y -aksen, får vi ein ny bølgefunksjon $g(\theta, \phi)$. Finn $g(\theta, \phi)$.

c) Vis at $g(\theta, \phi)$ er ein eigentilstand til \hat{L}_x og finn den tilhøyrande eigenverdien. Forklar resultatet.

d) Kva er dei moglege måleverdiane viss ein målar z -komponenten av dreieimpulsen i tilstanden $g(\theta, \phi)$? Er L_z skarp i tilstanden $g(\theta, \phi)$?

Oppgåve 3

Her kjem litt blanda drops.

a) Gjer kort greie for skilnaden mellom grunntilstanden til den klassiske oscillatoren og den kvantemekaniske oscillatoren.

b) Kva tyder det at to observable F og G er kompatible?

- c) Er operatoren $\hat{A} = -\frac{d}{dx}$ hermitesk? Grunnge svaret.
- d) Forklar kort omgrepet bunden tilstand.
- e) Forklar potensrekkmjetoden for differensiallikningar.
-

Nyttige formlar:

Rotasjon vinkel $\frac{\pi}{2}$ rundt y -aksen:

$$x \rightarrow -z \quad (4)$$

$$y \rightarrow y \quad (5)$$

$$z \rightarrow x \quad (6)$$

$$(7)$$

Dreieimpulsoperatorar

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left[-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (8)$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left[\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (9)$$

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (11)$$

Diskontinuitet til $\psi(x)$ for eit delta-funksjonspotensial

$$\psi'(x^+) - \psi'(x^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(x). \quad (12)$$