

## TFY4215 Innføring i kvantefysikk Eksamen 7. desember 2021

### 1 – 8: OPPVARMING

Oppgave 1 – 3: En fri partikkel med masse  $m$  i det konstante potensialet  $V = 0$  befinner seg i den stasjonære tilstanden  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$ .

1) Hva er partikkelens impuls  $p$ ?

- A)  $p$  er uskarp    B)  $p = k$     C)  $p = \hbar k$     D)  $p = k/m$     E)  $p = \hbar k/m$     F)  $p = \hbar\omega$

2) Hva er partikkelens energi  $E$ ?

- A)  $E$  er uskarp    B)  $E = k$     C)  $E = \hbar k$     D)  $E = k/m$     E)  $E = \hbar k/m$     F)  $E = \hbar\omega$

3) Hva er sannsynlighetsstrømmen  $j$  i denne tilstanden?

- A)  $j$  er uskarp    B)  $j = k$     C)  $j = \hbar k$     D)  $j = k/m$     E)  $j = \hbar k/m$     F)  $j = \hbar\omega$

4) Hva er den klassiske grensen av kvantemekanikk i form av verdien av  $\hbar$ ?

- A)  $\hbar \rightarrow 0$     B)  $\hbar \rightarrow \infty$     C)  $\hbar < 1 \text{ Js}$     D)  $\hbar > 1 \text{ Js}$     E)  $\hbar = 1 \text{ Js}$     F)  $\hbar < 0$

5) Hva er termisk de Broglie – bølgelengde til  $\text{C}_{60}$ -molekyler ved 300 K? ( $m_{\text{C}} = 12u$ )

- A) 2.1 pm    B) 3.2 pm    C) 4.3 pm    D) 5.4 pm    E) 6.5 pm    F) 7.6 pm

6) Hva er rms-hastigheten til  $\text{C}_{60}$ -molekyler ved 300 K?

- A) 81 m/s    B) 102 m/s    C) 123 m/s    D) 144 m/s    E) 165 m/s    F) 186 m/s

7) Hva er midlere rotasjonsenergi pr  $\text{C}_{60}$ -molekyl ved 300 K? (Molekylet er ikke lineært.)

- A) 21 meV    B) 39 meV    C) 57 meV    D) 75 meV    E) 93 meV    F) 111 meV

8) Hva er impulsen, i enheten  $\text{GeV}/c$ , til en gullkjerne med kinetisk energi 170 GeV og masse  $197u$ ?

- A) 102    B) 142    C) 182    D) 222    E) 262    F) 302

## 9 – 16: 1D BOKS OG HARMONISK OSCILLATOR

Oppgave 9 – 12: En partikkel med masse  $m$  befinner seg i bokspotensialet  $V(x) = 0$  for  $0 < x < L$ ,  $V(x) = \infty$  ellers.

9) Partikkelen absorberer et foton og eksiteres fra grunntilstanden  $\psi_1$  til 3. eksiterte tilstand  $\psi_4$ . **Hva er fotonets bølgelengde?**

- A)  $2mcL^2/15h$       B)  $4mcL^2/15h$       C)  $8mcL^2/15h$   
D)  $15mcL^2/2h$       E)  $15mcL^2/4h$       F)  $15mcL^2/8h$

10) Anta at partikkelen befinner seg i den normerte men ikke-stasjonære tilstanden

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=3,5} c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med  $c_3 = 1/2$  og  $c_5 = \sqrt{3}/2$ . Sannsynlighetstettheten  $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$  vil da variere harmonisk med tiden. **Med hvilken frekvens  $\nu$  oscillerer  $\rho(x, t)$ ?**

- A)  $h/2mL^2$       B)  $h/4mL^2$       C)  $h/8mL^2$       D)  $2h/mL^2$       E)  $4h/mL^2$       F)  $8h/mL^2$

11) Anta at partikkelen er preparert i en normert starttilstand  $\Psi(x, 0) = \sqrt{12/L^3} x$  for  $0 < x < L/2$  og  $\Psi(x, 0) = \sqrt{12/L^3} (L - x)$  for  $L/2 < x < L$ . **Hva er da sannsynligheten for at en måling av partikkelens energi gir resultatet  $E_2$ ?**

- A) Null      B) 0.19      C) 0.29      D) 0.39      E) 0.49      F) 0.59

12) Anta at partikkelen er preparert i en normert starttilstand  $\Psi(x, 0) = \sqrt{96/L^3} x$  for  $0 < x < L/4$ ,  $\Psi(x, 0) = \sqrt{96/L^3} (L/2 - x)$  for  $L/4 < x < L/2$ , og  $\Psi(x, 0) = 0$  for  $L/2 < x < L$ . **Hva er da sannsynligheten for at en måling av partikkelens energi gir resultatet  $E_2$ ?**

- A) Null      B) 0.19      C) 0.29      D) 0.39      E) 0.49      F) 0.59

Oppgitt:

$$\int_0^{\pi/2} z \sin z \, dz = 1$$

Oppgave 13 – 16: En partikkel med masse  $m$  befinner seg i potensialet  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ .

**13) Hva er det klassisk forbudte området hvis partikkelen befinner seg i 3. eksiterte tilstand ( $n = 3$ )?**

- A)  $|x| < \sqrt{3\hbar/m\omega}$     B)  $|x| > \sqrt{3\hbar/m\omega}$     C)  $|x| < \sqrt{6\hbar/m\omega}$   
D)  $|x| > \sqrt{6\hbar/m\omega}$     E)  $|x| < \sqrt{7\hbar/m\omega}$     F)  $|x| > \sqrt{7\hbar/m\omega}$

**14) Hva er sannsynligheten for å finne partikkelen i det klassisk forbudte området dersom den befinner seg i grunntilstanden?**

- A) 0.0322    B) 0.157    C) 0.00629    D) 0.288    E) 0.0921    F) 0.444

Oppgitt:

$$\int_{-1}^1 e^{-y^2} dy \simeq 1.49365$$

**15) Anta at partikkelen befinner seg i (den normerte men ikke-stasjonære) tilstanden**

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=3}^6 c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med  $c_3 = c_6 = \sqrt{1/8}$  og  $c_4 = c_5 = \sqrt{3/8}$ . **Hva er forventningsverdien  $\langle E \rangle$  av partikkelens energi?**

- A)  $7\hbar\omega/2$     B)  $4\hbar\omega$     C)  $9\hbar\omega/2$     D)  $5\hbar\omega$     E)  $11\hbar\omega/2$     F)  $6\hbar\omega$

**16) En måling av energien til partikkelen i oppgave 15 gir resultatet  $11\hbar\omega/2$ . Like etter denne energimålingen, hva er forventningsverdien  $\langle E \rangle$  av partikkelens energi?**

- A)  $7\hbar\omega/2$     B)  $4\hbar\omega$     C)  $9\hbar\omega/2$     D)  $5\hbar\omega$     E)  $11\hbar\omega/2$     F)  $6\hbar\omega$

## 17 – 24: STYKKEVIS KONSTANTE POTENSIALER I 1 DIMENSJON

Oppgave 17 – 18: Diskretisering av TUSL, med enkleste tilnærming for  $d^2\psi/dx^2$ , gir differanseligningene

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2}(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + V_n\psi_n = E\psi_n.$$

Her er  $a = x_{n+1} - x_n$  avstanden mellom "gitterpunktene" og  $m$  er partikkelens masse. For en fri partikkel, med  $V_n = 0$  for alle  $n$ , er bølgefunksjonen  $\psi(x_n) = \psi_n = \exp(ikx_n) = \exp(ikna)$ , med bølgetall  $k$  og energi (dispersjonsrelasjon)  $E(k)$ .

**17) Hvordan ser dispersjonsrelasjonen ut dersom partikkelens bølgelengde  $\lambda \gg a$ , dvs i nærheten av  $k = 0$ ?**

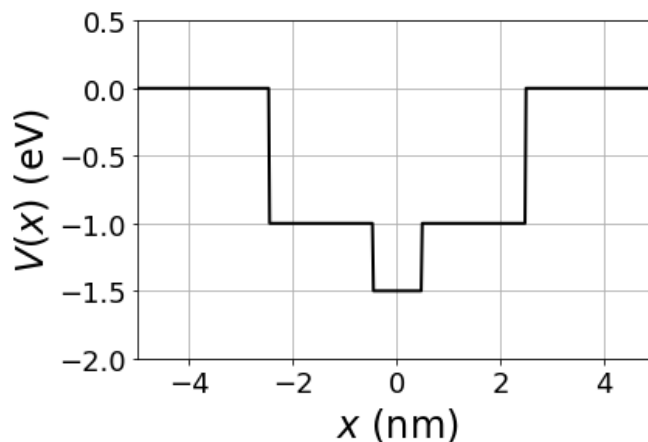
- A)  $E(k) = \hbar^2 \sin(ka)/ma^2$       B)  $E(k) = \hbar^2 \cos(ka)/ma^2$       C)  $E(k) = \hbar^2 k^2/2m$   
 D)  $E(k) = \hbar^2 k^2/m$       E)  $E(k) = 2\hbar^2 k^2/m$       F)  $E(k) = \hbar^2 \tan(ka)/ma^2$

**18) Den romlige diskretiseringen (dvs av  $x$ -aksen) resulterer i ett energibånd med tillatte verdier for  $E$ . Hva er tillatte verdier for  $E$ ?**

- A)  $0 \leq E \leq \hbar^2/2ma^2$       B)  $0 \leq E \leq \hbar^2/ma^2$       C)  $0 \leq E \leq 2\hbar^2/ma^2$   
 D)  $\hbar^2/4ma^2 \leq E \leq \hbar^2/2ma^2$       E)  $\hbar^2/2ma^2 \leq E \leq \hbar^2/ma^2$       F)  $\hbar^2/ma^2 \leq E \leq 2\hbar^2/ma^2$

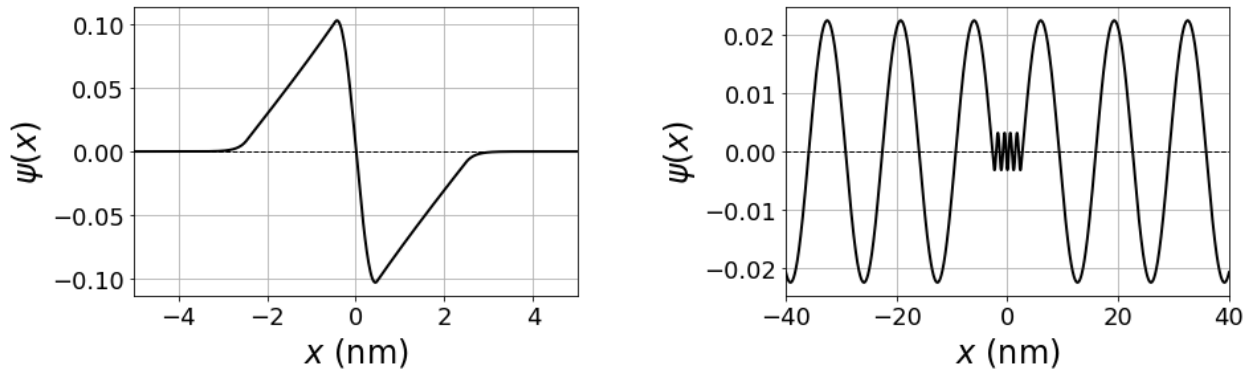
Oppgitt:  $\cos x \simeq 1 - x^2/2$  når  $|x| \ll 1$ .

Oppgave 19 – 21: Med tre ulike halvledere har du fabrikkert en lagdelt struktur som resulterer i et stykkevis konstant potensial  $V(x)$  som er symmetrisk om  $x = 0$ :



Den dypeste brønnen i midten har bredde 1.0 nm. Området med  $V = -1.0$  eV på hver side har bredde 2.0 nm. Du kan anta at områdene der  $V = 0$  fortsetter mot  $|x| \rightarrow \infty$ .

Figuren nedenfor viser to bølgefunksjoner for et elektron med masse  $m_e$  i dette potensialet. La oss nummerere bølgefunksjonene  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  osv, fra grunntilstanden  $\psi_0$  og oppover, med økende energi.



19) Hvilken tilstand er vist i figuren til venstre?

- A)  $\psi_0$     B)  $\psi_1$     C)  $\psi_2$     D)  $\psi_3$     E)  $\psi_4$     F)  $\psi_5$

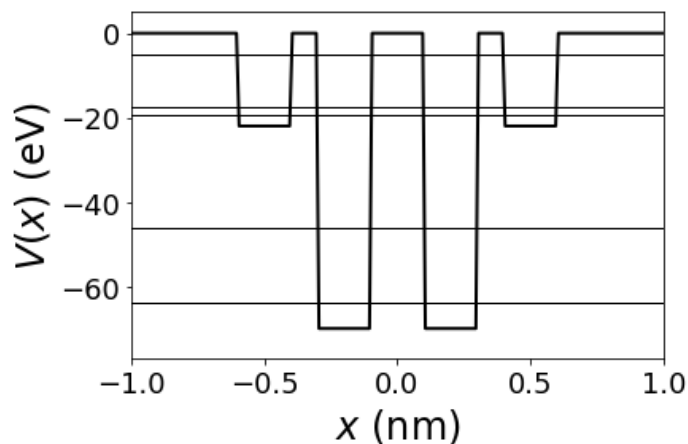
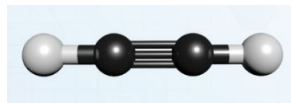
20) Hva er energieigenverdien for tilstanden i figuren til venstre?

- A)  $-1.4$  eV    B)  $-1.0$  eV    C)  $-0.6$  eV    D)  $-0.2$  eV    E)  $0.2$  eV    F)  $0.6$  eV

21) Hva er energieigenverdien for tilstanden i figuren til høyre?

- A)  $-14$  meV    B)  $-6.3$  meV    C)  $2.8$  meV    D)  $8.5$  meV    E)  $23$  meV    F)  $79$  meV

Oppgave 22 – 24: Potensialet  $V(x)$  i figuren nedenfor er en endimensjonal karikatur av potensialet som elektronene opplever i det lineære molekylet  $C_2H_2$  (acetylen; molekylmodell øverst med hvite H og svarte C):



I denne kvalitative modellen har molekylet 10 romlige bundne tilstander med omtrentlige energi-egenverdier  $E_0 \simeq E_1 \simeq -64$  eV,  $E_2 \simeq E_3 \simeq -46$  eV,  $E_4 \simeq E_5 \simeq -19$  eV,  $E_6 \simeq E_7 \simeq -17$  eV og  $E_8 \simeq E_9 \simeq -5.2$  eV, angitt med horisontale linjer i figuren på forrige side. Karbon og hydrogen har atomnummer hhv 6 og 1. Her antar vi at molekylets elektroner ikke vekselvirker med hverandre, men siden de er fermioner med spinn  $1/2$ , adlyder de Pauliprinsippet.

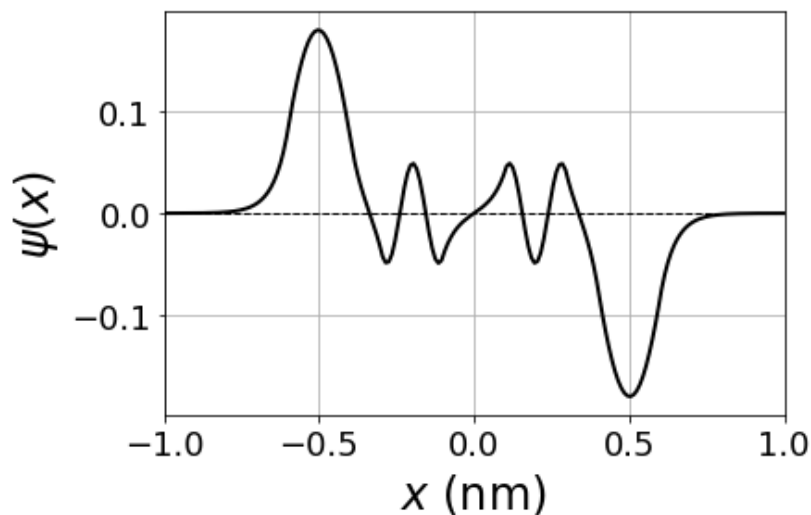
**22) Hva er den totale energien til molekylets elektroner i molekylets grunntilstand?**

- A)  $-550$  eV    B)  $-605$  eV    C)  $-660$  eV    D)  $-715$  eV    E)  $-770$  eV    F)  $-825$  eV

**23) Hva er molekylets ioniseringsenergi?** (Dvs, minste påkrevde energi for å løsrive et elektron fra molekylet når det er i sin grunntilstand.)

- A)  $5.2$  eV    B)  $17$  eV    C)  $19$  eV    D)  $36$  eV    E)  $46$  eV    F)  $64$  eV

**24) Figuren nedenfor viser en av molekylets bundne tilstander:**



**Hva er tilhørende energi egenverdi?**

- A)  $-5.2$  eV    B)  $-17$  eV    C)  $-19$  eV    D)  $-36$  eV    E)  $-46$  eV    F)  $-64$  eV

## 25 – 32: KVANTEMEKANIKK I 2 OG 3 DIMENSJONER

Oppgave 25 – 27: Vi ser her på 3d-tilstander i hydrogenatomet,  $\psi_{32m} = R_{32}(r) Y_{2m}(\theta, \phi)$ , med radialfunksjon

$$R_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$$

og med vinkelfunksjoner som i formelvedlegget. ( $a_0$  er Bohrradien.)

**25) I hvilke posisjoner  $(x, y, z)$  har  $|\psi_{320}|^2$  sin maksimale verdi?**

- A)  $(\pm 6a_0, 0, 0)$       B)  $(\pm 3a_0, 0, 0)$       C)  $(0, \pm 6a_0, 0)$   
D)  $(0, \pm 3a_0, 0)$       E)  $(0, 0, \pm 6a_0)$       F)  $(0, 0, \pm 3a_0)$

**26) Hvor stor vinkel danner vektoren  $L$  med  $z$ -aksen når elektronet befinner seg i tilstanden  $\psi_{321}$ ?**

- A)  $18^\circ$       B)  $30^\circ$       C)  $42^\circ$       D)  $54^\circ$       E)  $66^\circ$       F)  $78^\circ$

**27) Hva er  $Y_{22} \cdot \sqrt{32\pi/15}$  i kartesiske koordinater (og  $r$ )?**

- A)  $(x + iy)^2/r^2$       B)  $(x^2 + y^2)/r^2$       C)  $(x^2 - y^2)/r^2$   
D)  $(x - y + iz)^2/r^2$       E)  $(xy + iz^2)/r^2$       F)  $y^2/r^2$

Oppgitt:  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  ,  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Oppgave 28 – 30: En partikkel med masse  $m$  befinner seg i et todimensjonalt isotropt harmonisk potensial  $V(r) = m\omega^2 r^2/2$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ . Energiegentilstandene er på produktform,

$$(n_x n_y) \equiv \psi_{n_x}(x) \cdot \psi_{n_y}(y) \quad (n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots).$$

**28) Hva er (romlig) degenerasjonsgrad for energinivået  $10\hbar\omega$ ?**

- A) 5      B) 6      C) 7      D) 8      E) 9      F) 10

**29) Hva er mulige måleresultater for  $L_z$  i tilstanden  $[(10) - i(01)]/\sqrt{2}$ ?**

- A)  $\hbar$       B)  $-\hbar$       C)  $2\hbar$       D)  $-2\hbar$       E)  $\hbar/2$       F)  $-\hbar/2$

**30) Hva er mulige måleresultater for  $L_z$  i tilstanden (11)?**

- A)  $2\hbar$       B)  $-2\hbar$       C)  $\hbar$       D)  $-\hbar$       E)  $\pm 2\hbar$       F)  $\pm \hbar$

Oppgave 31 – 32: Ikke-vekselvirkende elektroner (fermioner, spinn  $1/2$ , masse  $m_e$ ) befinner seg i en todimensjonal potensialboks, nærmere bestemt på en kvadratisk flate avgrenset av  $0 < x < L = 100$  nm og  $0 < y < L$ . På denne flaten er potensialet  $V = 0$ , utenfor er  $V = \infty$ . Partikkeltettheten i denne todimensjonale elektrongassen er  $10^{14}$  pr  $\text{cm}^2$ . Vi antar at temperaturen er lav, slik at systemet er i sin grunntilstand.

**31) Hva er farten til de langsomste elektronene?**

- A) 0.6 km/s    B) 2.1 km/s    C) 3.6 km/s    D) 5.1 km/s    E) 6.6 km/s    F) 8.1 km/s

**32) Hva er farten til de raskeste elektronene?**

- A) 289 km/s    B) 389 km/s    C) 489 km/s    D) 589 km/s    E) 689 km/s    F) 789 km/s



### 33 – 40: SPINN

33) Hydrogenatomer i grunntilstanden (1s) befinner seg i et ytre magnetfelt  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . Elektronet i hvert atom har et spinn  $\mathbf{S}$  og et tilhørende magnetisk dipolmoment  $\boldsymbol{\mu} = (-e/m_e)\mathbf{S}$ . Hvis den magnetiske feltstyrken er 7.0 T, **hva er energiforskjellen mellom atomer med elektronspinn opp og ned**, dvs med spinntilstand henholdsvis  $\chi_+$  og  $\chi_-$ ?

- A) 0.21 meV    B) 0.33 meV    C) 0.45 meV    D) 0.57 meV    E) 0.69 meV    F) 0.81 meV

Opgitt: Potensiell energi for magnetisk dipol i magnetfelt:  $V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ .

34) I forrige oppgave, hvor stor er vinkelen mellom elektronets spinn  $\mathbf{S}$  og  $z$ -aksen?

- A) 24.7°    B) 34.7°    C) 44.7°    D) 54.7°    E) 64.7°    F) 74.7°

35) Et elektron befinner seg i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Hva er  $S_x$  for dette elektronet?

- A) Uskarp    B) Null    C)  $\hbar/2$     D)  $-\hbar/2$     E)  $\hbar$     F)  $-\hbar$

36) Et elektron befinner seg i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Hva er  $S_y$  for dette elektronet?

- A) Uskarp    B) Null    C)  $\hbar/2$     D)  $-\hbar/2$     E)  $\hbar$     F)  $-\hbar$

37) Hva er  $\langle S_z \rangle$  for et elektron i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2i + 3 \\ i - 4 \end{pmatrix}?$$

- A)  $-\hbar/45$     B)  $-\hbar/30$     C)  $-\hbar/15$     D)  $\hbar/15$     E)  $\hbar/30$     F)  $\hbar/45$

38) Hva er  $\langle S_z^2 \rangle$  for et elektron i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2i + 3 \\ i - 4 \end{pmatrix}?$$

- A)  $\hbar^2/2$     B)  $\hbar^2/3$     C)  $\hbar^2/4$     D)  $\hbar^2/5$     E)  $\hbar^2/6$     F)  $\hbar^2/8$

39) Hva er  $\Delta S_x$  for et elektron i spinntilstanden

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

- A)  $\hbar/2$     B)  $\hbar/3$     C)  $\hbar/4$     D)  $\hbar/5$     E)  $\hbar/6$     F)  $\hbar/8$

40)



Hva var – ifølge historien – nøkkelen til at de to stripene med avbøyde sølvatomer i det hele tatt ble observert i Stern–Gerlach–eksperimentet?

- A) Fire pils  
B) En pizza  
C) Ei flaske vin i ny og ne  
D) Lite biff  
E) Dyr champagne  
F) Billige sigarer med høyt svovelinnhold