

TFY4215 Innføring i kvantefysikk Eksamen 17. august 2022

1 – 8: OPPVARMING

Oppgave 1 – 5: Et fritt elektron med masse m_e i det konstante potensialet $V = 0$ befinner seg i den stasjonære tilstanden $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$ med $k = 1.00 \text{ nm}^{-1}$.

1) Hva er partikkelens impuls?

- A) $1.05 \cdot 10^{-34} \text{ kg m/s}$ B) $1.05 \cdot 10^{-31} \text{ kg m/s}$ C) $1.05 \cdot 10^{-28} \text{ kg m/s}$
D) $1.05 \cdot 10^{-25} \text{ kg m/s}$ E) $1.05 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$ F) $1.05 \cdot 10^{-19} \text{ kg m/s}$

2) Hva er partikkelens kinetiske energi?

- A) 28 meV B) 38 meV C) 48 meV D) 58 meV E) 68 meV F) 78 meV

3) Hva er verdien av størrelsen ω ?

- A) 18 ps^{-1} B) 28 ps^{-1} C) 38 ps^{-1} D) 48 ps^{-1} E) 58 ps^{-1} F) 68 ps^{-1}

4) Hva er elektronets hastighet?

- A) 615 km/s B) 515 km/s C) 415 km/s D) 315 km/s E) 215 km/s F) 115 km/s

5) Hva er sannsynlighetsstrømmen j i denne tilstanden?

- A) 615 km/s B) 515 km/s C) 415 km/s D) 315 km/s E) 215 km/s F) 115 km/s

6) Hva er termisk de Broglie – bølgelengde til CO_2 -molekyler ved 300 K?

($m_C = 12u$, $m_O = 16u$)

- A) 66 pm B) 55 pm C) 44 pm D) 33 pm E) 22 pm F) 11 pm

7) Hva er rms-hastigheten til CO_2 -molekyler ved 300 K?

- A) 634 m/s B) 523 m/s C) 412 m/s D) 301 m/s E) 290 m/s F) 189 m/s

8) Hva er midlere rotasjonsenergi pr CO_2 -molekyl ved 300 K? (Molekylet er lineært.)

- A) 11 meV B) 26 meV C) 41 meV D) 56 meV E) 71 meV F) 86 meV

9 – 16: 1D BOKS OG HARMONISK OSCILLATOR

Oppgave 9 – 12: Et elektron med masse m_e befinner seg i bokspotensialet $V(x) = 0$ for $0 < x < L$, $V(x) = \infty$ ellers. Boksbredden er $L = 40 \text{ \AA}$.

9) Elektronet emitterer et foton og gjennomgår en overgang fra 3. til 2. eksiterte tilstand, dvs fra ψ_4 til ψ_3 . **Hva er fotonets bølgelengde?**

- A) $1.6 \mu\text{m}$ B) $3.6 \mu\text{m}$ C) $5.6 \mu\text{m}$ D) $7.6 \mu\text{m}$ E) $9.6 \mu\text{m}$ F) $11.6 \mu\text{m}$

10) Anta at partikkelen befinner seg i den normerte men ikke-stasjonære tilstanden

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=3,4} c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med $c_3 = c_4 = 1/\sqrt{2}$. Sannsynlighetstettheten $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$ vil da variere harmonisk med tiden. **Med hvilken periode T oscillerer $\rho(x, t)$?**

- A) 15 fs B) 25 fs C) 35 fs D) 45 fs E) 55 fs F) 65 fs

11) Anta at partikkelen er preparert i en normert starttilstand $\Psi(x, 0) = \sqrt{2/L} \cos(\pi x/L)$. **Hva er da sannsynligheten for at en måling av partikkelens energi gir resultatet E_3 ?**

- A) Null B) 0.12 C) 0.22 D) 0.32 E) 0.42 F) 0.52

12) Anta at partikkelen er preparert i en normert starttilstand $\Psi(x, 0) = \sqrt{2/L} \cos(\pi x/L)$. **Hva er da sannsynligheten for at en måling av partikkelens energi gir resultatet E_4 ?**

- A) Null B) 0.12 C) 0.22 D) 0.32 E) 0.42 F) 0.52

Oppgitt:

$$\int_0^\pi \cos(z) \sin(2Nz) dz = 4N/(4N^2 - 1)$$

Oppgave 13 – 16: Vibrasjonsfrihetsgraden i molekylet Cl_2 kan, for relativt små utsving x fra likevekt, beskrives av potensialet $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, med $m \simeq 17.5u$. Molekylet har bindingslengde 2.18 \AA . Vibrasjonsenergien er da kvantisert, med energiene $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ og med $\hbar\omega = 69 \text{ meV}$.

13) Hva er det klassisk tillatte området for x i grunntilstanden? ($n = 0$)?

- A) $|x| < 3.9 \text{ pm}$ B) $|x| < 4.9 \text{ pm}$ C) $|x| < 5.9 \text{ pm}$
 D) $|x| < 6.9 \text{ pm}$ E) $|x| < 7.9 \text{ pm}$ F) $|x| < 8.9 \text{ pm}$

14) Ved romtemperatur 300 K er konsentrasjonen av molekyler i grunntilstanden n_0 og konsentrasjonen av molekyler i 1. eksiterte tilstand n_1 . **Hva er forholdet n_1/n_0 ?**

- A) 0.04 B) 0.05 C) 0.06 D) 0.07 E) 0.08 F) 0.09

Oppgitt:

$$n_j \sim \exp(-E_j/k_B T)$$

15) Anta at partikkelen befinner seg i (den normerte men ikke-stasjonære) tilstanden

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^3 c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med $c_0 = \sqrt{4/10}$, $c_1 = \sqrt{3/10}$, $c_2 = \sqrt{2/10}$ og $c_3 = \sqrt{1/10}$.

Hva er forventningsverdien $\langle E \rangle$ av molekylets vibrasjonsenergi?

- A) 144 meV B) 134 meV C) 124 meV D) 114 meV E) 104 meV F) 94 meV

16) En bedre beskrivelse av potensialet gir Morse-potensialet

$$V_M(x) = V_0(1 - \exp(-\alpha x))^2.$$

For små utsving x fra likevekt, hva er molekylets fjærkonstant k uttrykt ved parametrene i Morse-potensialet?

- A) $k = 3V_0\alpha$ B) $k = V_0/2\alpha$ C) $k = \alpha/V_0^2$ D) $k = \alpha^2/2$ E) $k = V_0\alpha$ F) $k = 2V_0\alpha^2$

17 – 24: STYKKEVIS KONSTANTE POTENSIALER I 1 DIMENSJON

Oppgave 17 – 18: Diskretisering av TUSL, med enkleste tilnærming for $d^2\psi/dx^2$, gir differanseligningene

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2}(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + V_n\psi_n = E\psi_n.$$

Her er $a = x_{n+1} - x_n$ avstanden mellom "gitterpunktene" og m er partikkelens masse. For en fri partikkel, med $V_n = 0$ for alle n , er bølgefunksjonen $\psi(x_n) = \psi_n = \exp(ikx_n) = \exp(ikna)$, med bølgetall k og energi (dispersjonsrelasjon) $E(k)$.

17) Hvordan ser dispersjonsrelasjonen ut dersom partikkelens bølgelengde $\lambda \gg a$, dvs i nærheten av $k = 0$?

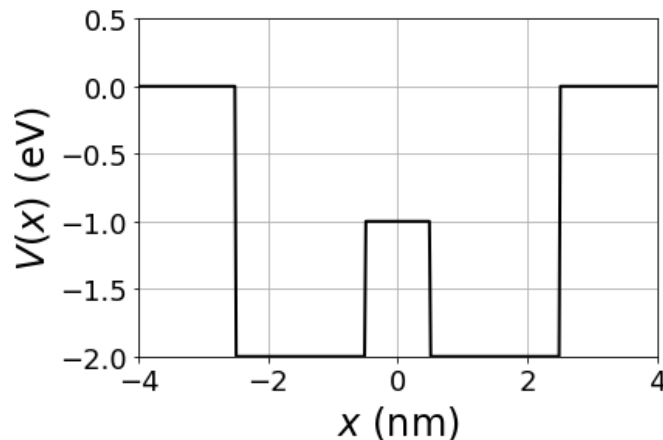
- A) $E(k) = \hbar^2 \sin(ka)/ma^2$ B) $E(k) = \hbar^2 \cos(ka)/ma^2$ C) $E(k) = \hbar^2 k^2/2m$
 D) $E(k) = \hbar^2 k^2/m$ E) $E(k) = 2\hbar^2 k^2/m$ F) $E(k) = \hbar^2 \tan(ka)/ma^2$

18) Den romlige diskretiseringen (av x -aksen) resulterer i ett energibånd med tillatte verdier for E . Hva er båndbredden ($E_{\max} - E_{\min}$) dersom partikkelen er et elektron og $a = 3.00 \text{ \AA}$?

- A) 1.18 eV B) 1.68 eV C) 2.18 eV D) 2.68 eV E) 3.18 eV F) 3.68 eV

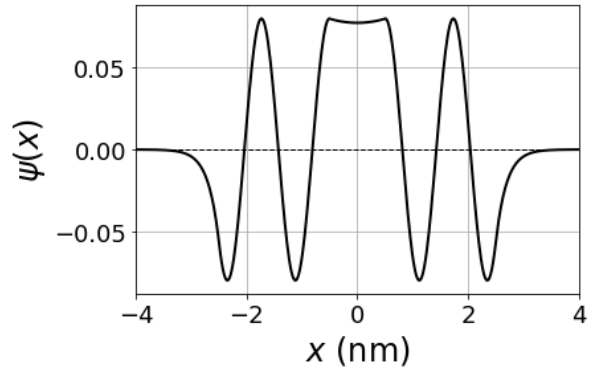
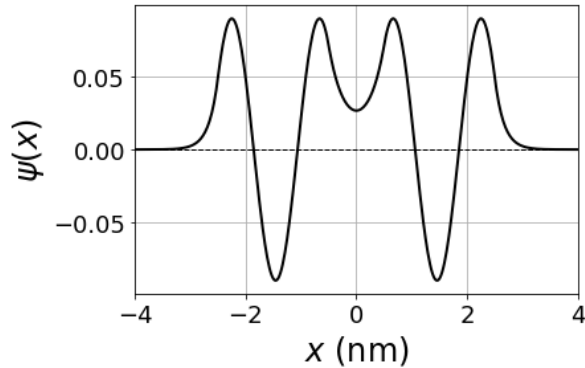
Oppgitt: $\cos x \simeq 1 - x^2/2$ når $|x| \ll 1$.

Oppgave 19 – 22: Med tre ulike halvledere har du fabrikkert en lagdelt struktur som resulterer i et stykkevis konstant potensial $V(x)$ som er symmetrisk om $x = 0$:



Den "lille" barrieren i midten har bredde 1.0 nm og potensialverdi -1.0 eV . Området med $V = -2.0 \text{ eV}$ på hver side har bredde 2.0 nm. Du kan anta at områdene der $V = 0$ fortsetter mot $|x| \rightarrow \infty$.

Figuren nedenfor viser to bølgefunksjoner for et elektron med masse m_e i dette potensialet. La oss nummerere bølgefunksjonene ψ_0, ψ_1, ψ_2 osv, fra grunntilstanden ψ_0 og oppover, med økende energi.



19) Hvilken tilstand er vist i figuren til venstre?

- A) ψ_2 B) ψ_3 C) ψ_4 D) ψ_5 E) ψ_6 F) ψ_7

20) Hvilken tilstand er vist i figuren til høyre?

- A) ψ_2 B) ψ_3 C) ψ_4 D) ψ_5 E) ψ_6 F) ψ_7

Nullpunktene til tilstanden i figuren til venstre har ca x -verdiene ± 1.86 og ± 1.06 nm.

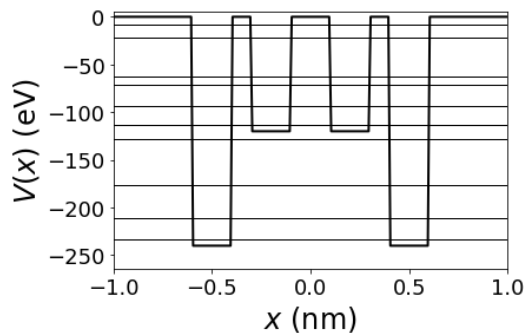
21) Hva er da omtrentlig energieigenverdien for tilstanden i figuren til venstre?

- A) -1.7 eV B) -1.4 eV C) -1.1 eV D) -0.8 eV E) -0.5 eV F) -0.2 eV

22) Med utgangspunkt i figuren til høyre, hva kan du si om energieigenverdien for denne tilstanden?

- A) Like i underkant av 0.0 eV
 B) Like i overkant av 0.0 eV
 C) Like i overkant av -2.0 eV
 D) Like i overkant av -1.0 eV
 E) Like i underkant av -1.0 eV
 F) Praktisk talt lik -1.5 eV

Oppgave 23 – 24: Potensialet $V(x)$ i figuren nedenfor er en endimensjonal karikatur av potensialet som elektronene opplever i det lineære molekylet C_2F_2 :



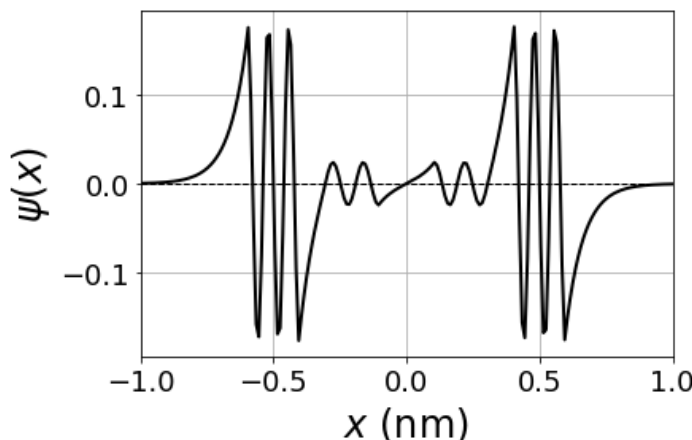
I denne kvalitative modellen har molekylet 20 romlige bundne tilstander med omtrentlige energiegenverdier som følger:

$E_0 \simeq E_1 \simeq -233$ eV, $E_2 \simeq E_3 \simeq -211$ eV, $E_4 \simeq E_5 \simeq -176$ eV, $E_6 \simeq E_7 \simeq -129$ eV, $E_8 \simeq E_9 \simeq -113$ eV, $E_{10} \simeq E_{11} \simeq -94$ eV, $E_{12} \simeq E_{13} \simeq -71$ eV, $E_{14} \simeq E_{15} \simeq -62$ eV, $E_{16} \simeq E_{17} \simeq -22$ eV, $E_{18} \simeq E_{19} \simeq -8.5$ eV. Disse egenverdiene er angitt med horisontale linjer i figuren for potensialet ovenfor. Karbon og fluor har atomnummer hhv 6 og 9. Her antar vi at molekylets elektroner ikke vekselvirker med hverandre, men siden de er fermioner med spinn $1/2$, adlyder de Pauliprinsippet.

23) Hvor mange romlige bundne tilstander er okkupert av elektroner i molekylets grunn-tilstand?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14 F) 15

24) Figuren nedenfor viser en av molekylets bundne tilstander:



Hva er tilhørende energiegenverdi?

- A) -8.5 eV B) -22 eV C) -62 eV D) -71 eV E) -94 eV F) -113 eV

25 – 32: KVANTEMEKANIKK I 2 OG 3 DIMENSJONER

Oppgave 25 – 27: Vi ser her på 2s-tilstanden i hydrogenatomet, $\psi_{200} = R_{20}(r) Y_{00}(\theta, \phi)$, med radial-funksjon

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}a_0^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

og med vinkelfunksjon som i formelvedlegget. (a_0 er Bohrradien.)

25) Hvor har $|R_{20}|^2$ sin maksimale verdi?

- A) $r = 0$ B) $r = 0.382a_0$ C) $r = 0.764a_0$ D) $r = 2a_0$ E) $r = 2.618a_0$ F) $r = 6a_0$

26) Hvor har radialtettheten $|rR_{20}|^2$ sin maksimale verdi?

- A) $r = 0$ B) $r = 0.382a_0$ C) $r = 0.764a_0$ D) $r = 2a_0$ E) $r = 2.618a_0$ F) $r = 6a_0$

27) Hva er $\langle r \rangle$ i denne tilstanden?

- A) $r = 0$ B) $r = 0.382a_0$ C) $r = 0.764a_0$ D) $r = 2a_0$ E) $r = 2.618a_0$ F) $r = 6a_0$

Oppgitt:

$$\begin{aligned} dP/dr &= (rR)^2 \\ \int_0^\infty x^3(1-x/2)^2 e^{-x} dx &= 12 \end{aligned}$$

Oppgave 28 – 30: En partikkel med masse m befinner seg i et todimensjonalt isotropt harmonisk potensial $V(r) = m\omega^2 r^2/2$, $r^2 = x^2 + y^2$. Energietilstandene er på produktform,

$$(n_x n_y) \equiv \psi_{n_x}(x) \cdot \psi_{n_y}(y) \quad (n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots).$$

28) Hva er (romlig) degenerasjonsgrad for energinivået $5\hbar\omega$?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6 F) 7

29) Hva er mulige måleresultater for L_z i tilstanden (01)?

- A) \hbar B) $-\hbar$ C) $2\hbar$ D) $-2\hbar$ E) $\pm\hbar$ F) $\pm 2\hbar$

30) Hva er mulige måleresultater for L_z i tilstanden (11)?

- A) \hbar B) $-\hbar$ C) $2\hbar$ D) $-2\hbar$ E) $\pm\hbar$ F) $\pm 2\hbar$

Oppgave 31 – 32: Ikke-vekselvirkende elektroner (fermioner, spinn 1/2, masse m_e) befinner seg i en kubisk tredimensjonal potensialboks avgrenset av $0 < x < L = 10$ nm, $0 < y < L$ og $0 < z < L$. I denne boksen er potensialet $V = 0$, utenfor er $V = \infty$. Partikkeltettheten i denne tredimensjonale elektrongassen er 10^{21} pr cm^3 . Vi antar at temperaturen er lav, slik at systemet er i sin grunntilstand.

31) Hva er energien til de langsamste elektronene?

- A) 7 meV B) 9 meV C) 11 meV D) 13 meV E) 15 meV F) 17 meV

32) Hva er energien til de raskeste elektronene?

- A) 0.36 eV B) 1.36 eV C) 2.36 eV D) 3.36 eV E) 4.36 eV F) 5.36 eV

33 – 40: SPINN

33) Hydrogenatomer i grunntilstanden (1s) befinner seg i et ytre magnetfelt $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Elektronet i hvert atom har et spinn \mathbf{S} og et tilhørende magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{\mu} = (-e/m_e)\mathbf{S}$. Hvis den magnetiske feltstyrken er 6.0 T, **hva er energiforskjellen mellom atomer med elektronspinn opp og ned**, dvs med spinntilstand henholdsvis χ_+ og χ_- ?

- A) 0.21 meV B) 0.33 meV C) 0.45 meV D) 0.57 meV E) 0.69 meV F) 0.81 meV

Opgitt: Potensiell energi for magnetisk dipol i magnetfelt: $V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$.

34) I forrige oppgave, hvor stor er vinkelen mellom elektronets spinn \mathbf{S} og xy -planet?

- A) 25.3° B) 35.3° C) 45.3° D) 55.3° E) 65.3° F) 75.3°

35) Et elektron befinner seg i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Hva er S_x for dette elektronet?

- A) Uskarp B) Null C) $\hbar/2$ D) $-\hbar/2$ E) \hbar F) $-\hbar$

36) Et elektron befinner seg i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Hva er S_z for dette elektronet?

- A) Uskarp B) Null C) $\hbar/2$ D) $-\hbar/2$ E) \hbar F) $-\hbar$

37) Hva er $\langle S_z \rangle$ for et elektron i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2i + 3 \\ 2i - 1 \end{pmatrix}?$$

- A) $\hbar/18$ B) $\hbar/9$ C) $2\hbar/9$ D) $-2\hbar/9$ E) $-\hbar/9$ F) $-\hbar/18$

38) Hva er $\langle S_z^2 \rangle$ for et elektron i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2i + 3 \\ 2i - 1 \end{pmatrix}?$$

- A) $\hbar^2/2$ B) $\hbar^2/3$ C) $\hbar^2/4$ D) $\hbar^2/5$ E) $\hbar^2/6$ F) $\hbar^2/8$

39) Hva er ΔS_y for et elektron i spinntilstanden

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

- A) $\hbar/5$ B) $\hbar/4$ C) $\hbar/3$ D) $\hbar/2$ E) $\hbar/6$ F) $\hbar/7$

40)



Hva var – ifølge historien – nøkkelen til at de to stripene med avbøyde sølvatomer i det hele tatt ble observert i Stern–Gerlach–eksperimentet?

- A) Et melkespann
B) Et krus
C) En melkekopp
D) Et kremmerhus
E) Et lokk
F) Billige sigarer med høyt svovelinnhold