

Oppgave 1–4: Stråling.

1) Plancks bølgelengdefordeling $dj/d\lambda$ (dvs utsendt effekt pr flate- og bølgelengdeenhet) avhenger kvalitativt av λ på denne måten: $dj/d\lambda \sim [\lambda^5(\exp(hc/k_B T\lambda) - 1)]^{-1}$.

Hvordan avhenger $dj/d\lambda$ av bølgelengden i den klassiske grensen $k_B T \gg hc/\lambda$?

- A) $dj/d\lambda \sim \lambda^{-4}$ B) $dj/d\lambda \sim \lambda^{-3}$ C) $dj/d\lambda \sim \lambda^{-2}$
D) $dj/d\lambda \sim \lambda^{-1}$ E) $dj/d\lambda \sim \lambda^1$ F) $dj/d\lambda \sim \lambda^2$

2) Wiens forskyvningslov uttrykker sammenhengen mellom et legemes temperatur T og bølgelengden λ hvor $dj/d\lambda$ har sin maksimale verdi. Resultatet $\lambda \cdot T = 0.00290 \text{ m} \cdot \text{K}$ utledes ved å sette $d(dj/d\lambda)/d\lambda = 0$ og løse den transcendent ligningen $z = 5 - 5e^{-z}$ for den dimensjonsløse størrelsen $z = hc/k_B T\lambda$.

Hvilken verdi av z gir best samsvar med Wiens forskyvningslov?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6 F) 7

3) Ligningen $z = 5 - 5e^{-z}$ kan løses iterativt, dvs $z_{i+1} = 5 - 5e^{-z_i}$, for eksempel med startverdi $z_0 = 1$ på høyre side.

Hvor mange ganger må høyre side beregnes for å få verdien av z med 4 gjeldende sifre?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10 F) 12

4) Anta at jorda er ei svart kule med radius 6371 km og overflatetemperatur 287 K.

Hva er omtrent total emittert effekt?

- A) $2 \cdot 10^7 \text{ W}$ B) $2 \cdot 10^9 \text{ W}$ C) $2 \cdot 10^{11} \text{ W}$ D) $2 \cdot 10^{13} \text{ W}$ E) $2 \cdot 10^{15} \text{ W}$ F) $2 \cdot 10^{17} \text{ W}$

5) Ikke-relativistisk bindingsenergi i grunntilstanden for et elektron bundet til en kjerne med Z protoner er $Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV}$.

Hvor stor må Z minst være for at denne energien skal overstige 1% av elektronets hvileenergi $m_e c^2$?

- A) 70 B) 60 C) 50 D) 40 E) 30 F) 20
-

Oppgave 6–10: Partikkel i boks.

Et elektron er begrenset til å bevege seg i en dimensjon, mellom $x = 0$ og $x = L = 2.0$ nm. Potensialet er $V = 0$ for $0 < x < L$ og $V = \infty$ ellers.

6) Hva er omtrent elektronets fart i grunntilstanden?

- A) 270 km/s B) 240 km/s C) 210 km/s
D) 180 km/s E) 150 km/s F) 120 km/s

7) Hva er bølgelengden til et foton som eksiterer elektronet fra grunntilstanden til 1. eksiterte tilstand?

- A) $6.4 \mu\text{m}$ B) $5.4 \mu\text{m}$ C) $4.4 \mu\text{m}$ D) $3.4 \mu\text{m}$ E) $2.4 \mu\text{m}$ F) $1.4 \mu\text{m}$

8) Anta at elektronet ved tidspunktet $t = 0$ er preparert i en starttilstand beskrevet ved den normerte bølgefunksjonen

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{4}{L}} \sin(2\pi x/L)$$

i boksens venstre halvdel $0 < x < L/2$ og $\Psi(x, 0) = 0$ i boksens høyre halvdel $L/2 < x < L$.

Hva er sannsynligheten for at en måling av elektronets energi gir verdien E_1 ?

- A) 0.76 B) 0.66 C) 0.56 D) 0.46 E) 0.36 F) 0.26

Oppgitt: $\int \sin z \sin 2z dz = \frac{2}{3} \sin^3 z$ $\int \sin^2 z dz = \frac{1}{2}(z - \sin z \cos z)$

9) Med samme starttilstand som beskrevet i forrige oppgave, hva er sannsynligheten for at en måling av elektronets energi gir verdien E_2 ?

- A) 0.50 B) 0.55 C) 0.60 D) 0.65 E) 0.70 F) 0.75

10) Anta nå at elektronet beskrives av den ikke-stasjonære (men normerte) bølgefunksjonen

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^4 c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad \text{med} \quad c_1 = c_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hva er forventningsverdien $\langle E \rangle$ av partikkelens energi?

- A) 0.87 eV B) 0.77 eV C) 0.67 eV D) 0.57 eV E) 0.47 eV F) 0.37 eV

Oppgave 11–14: Harmonisk oscillator.

Ikkevekselvirkende elektroner med spinn $1/2$ og masse m_e adlyder Pauliprinsippet. Sju elektroner befinner seg i potensialet $V(x) = kx^2/2$, der $k = 1.25 \text{ eV/nm}^2$. Temperaturen er lav slik at termisk energi $k_B T$ er mye mindre enn avstanden mellom de kvantiserte energinivåene.

11) Hva er total utstrekning på det klassisk tillatte området for et elektron som befinner seg i grunntilstanden?

- A) 4.9 \AA B) 5.9 \AA C) 6.9 \AA D) 7.9 \AA E) 8.9 \AA F) 9.9 \AA

12) Anta at strålingsoverganger bare kan skje mellom nabonivåer med energi E_n og $E_{n\pm 1}$. Hva er bølgelengden til et emittert eller absorbert foton i en slik prosess?

- A) 2.0 \mu m B) 3.0 \mu m C) 4.0 \mu m D) 5.0 \mu m E) 6.0 \mu m F) 7.0 \mu m

13) Hva er de sju elektronenes totale spinn?

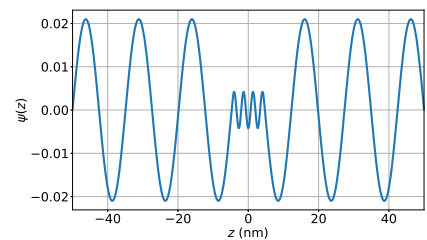
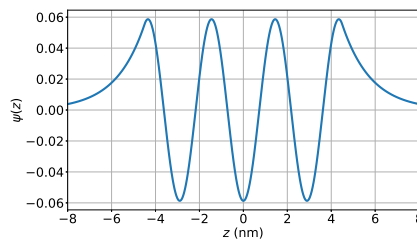
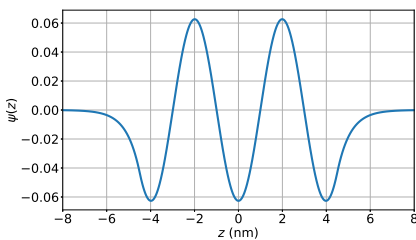
- A) $\sqrt{3}\hbar/2$ B) $\sqrt{3}\hbar$ C) $3\sqrt{3}\hbar/2$ D) $2\sqrt{3}\hbar$ E) $5\sqrt{3}\hbar/2$ F) $3\sqrt{3}\hbar$

14) Hva er de sju elektronenes totale energi?

- A) 5.8 eV B) 7.8 eV C) 3.8 eV D) 1.8 eV E) 11.8 eV F) 9.8 eV

Oppgave 15–17: Endelig potensialbrønn.

I en potensialbrønn ($-4.50 \text{ nm} < z < 4.50 \text{ nm}$) er potensialet $V(z) = -200 \text{ meV}$. På hver side av brønnen er det et område med bredde 45.50 nm og potensial $V(z) = 0$. Utenfor dette er $V(z) \simeq \infty$.



15) Et elektron befinner seg i tilstanden som vises i figuren til venstre. Så lenge elektronet er i det klassisk tillatte brønnområdet,

hva er omtrent absoluttverdien av farten v ?

- A) 330 km/s B) 300 km/s C) 270 km/s
 D) 240 km/s E) 210 km/s F) 180 km/s

16) Figuren i midten viser den av potensialbrønnens bundne tilstander som har høyest energi. Hvor mange bundne tilstander er det i denne potensialbrønnen?

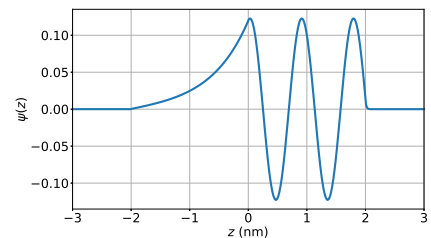
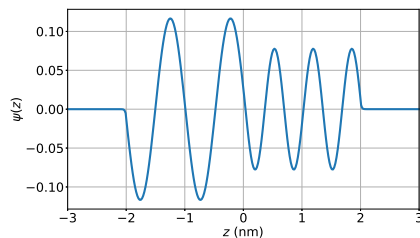
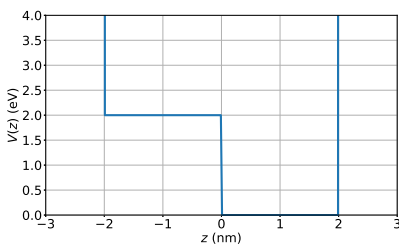
- A) 13 B) 11 C) 9 D) 7 E) 5 F) 3

17) Figuren til høyre viser en tilstand der hele systemets utstrekning er klassisk tillatt. Hva er energien til et elektron som befinner seg i denne tilstanden?

- A) 9.6 meV B) 8.6 meV C) 7.6 meV D) 6.6 meV E) 5.6 meV F) 4.6 meV

Oppgave 18–20: Boks med trinn.

Bokspotensialet i figuren til venstre har verdien 2.00 eV på intervallet $-2.00 \text{ nm} < z < 0 \text{ nm}$ og verdien 0 eV på intervallet $0 \text{ nm} < z < 2.00 \text{ nm}$. For $|z| > 2.00 \text{ nm}$ er $V(z) \simeq \infty$.



18) En måling av kinetisk energi K for et elektron som befinner seg i tilstanden i figuren i midten vil enten gi verdien K_H eller verdien $K_V < K_H$.

Hva er et godt estimat for forholdet K_H/K_V ?

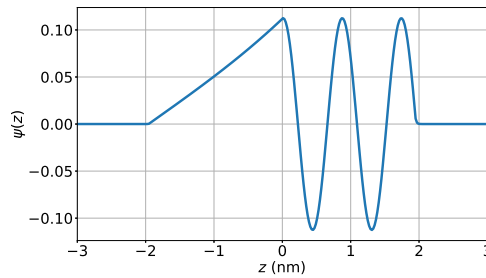
- A) 9/4 B) 8/5 C) 7/6 D) 10/3 E) 11/2 F) 12

19) Tilstanden i figuren til høyre kan med god tilnærming uttrykkes på formen $\psi(z) = C \exp(\kappa z)$ på intervallet $-2.00 < z < 0 \text{ nm}$. Fra figuren leser vi av $\psi(-1 \text{ nm}) \simeq 0.025$ og $\psi(0) \simeq 0.120$.

Hva er denne tilstandens inverse inntrengningsdybde κ ?

- A) 1.27 nm^{-1} B) 1.57 nm^{-1} C) 1.87 nm^{-1}
 D) 2.17 nm^{-1} E) 2.47 nm^{-1} F) 2.77 nm^{-1}

20) Hvis vi flytter de harde veggene (der $V \rightarrow \infty$) litt (ca 0.5 \AA) inn mot midten, endres energiverdier og tilhørende bølgefunksjoner. Tilstanden beskrevet i oppgave 19 ser nå slik ut:



Hva er energiverdien til denne tilstanden?

- A) 2.0 eV B) 2.5 eV C) 3.0 eV D) 3.5 eV E) 4.0 eV F) 4.5 eV

Oppgave 21–24: Tredimensjonal boks.

Energivåene for elektroner (fermioner; to spinntilstander for hver romlige orbital) i en tredimensjonal kubisk boks med sidekanter L er

$$E = E_0 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Her er $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L^2}$, og kvantetallene n_x, n_y, n_z er positive heltall.

21) Hva er total degenerasjonsgrad (inklusive spindegenerasjon) til energivået $14E_0$?

- A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 4 F) 3

22) Tillatte energier mindre enn $14E_0$ er $3E_0, 6E_0, 9E_0, 11E_0, 12E_0$. Hvor mange elektroner med energi mindre enn $14E_0$ kan vi ha i denne boksen?

- A) 10 B) 14 C) 18 D) 22 E) 26 F) 30

23) Anta at boksen har sidekanter $L = 5.00 \text{ nm}$ og inneholder 13 ikkevekselvirkende elektroner. Hva er disse elektronenes totale energi når systemet er i sin grunntilstand?

- A) 4.3 eV B) 3.3 eV C) 5.3 eV D) 1.3 eV E) 0.3 eV F) 2.3 eV

24) Anta at et elektron befinner seg i en tilstand med skarp dreieimpulskomponent L_z . Hvilken størrelse kan da være skarp samtidig?

- A) p_z B) p_y C) p_x D) L_y E) L_x F) y

Oppgave 25 – 29: Hydrogenatomet.

Energietilstandene med $n = 3$ i hydrogenatomet er

$$\psi_{3lm}(\mathbf{r}) = R_{3l}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

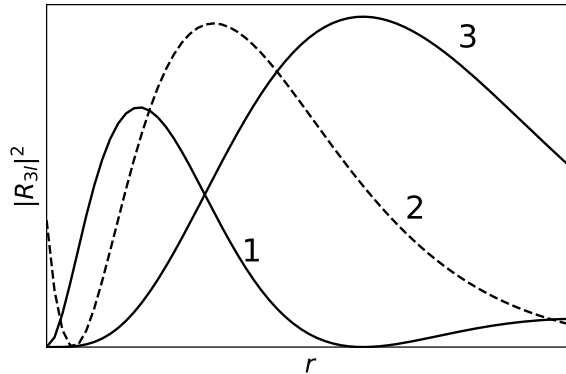
med radialfunksjoner

$$R_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \exp(-r/3a_0)$$

$$R_{31}(r) = \frac{8}{27\sqrt{6}a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{6a_0^2}\right) \exp(-r/3a_0)$$

$$R_{30}(r) = \frac{2}{3\sqrt{3}a_0^{3/2}} \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right) \exp(-r/3a_0)$$

og med sfæriske harmoniske som i formelvedlegget.



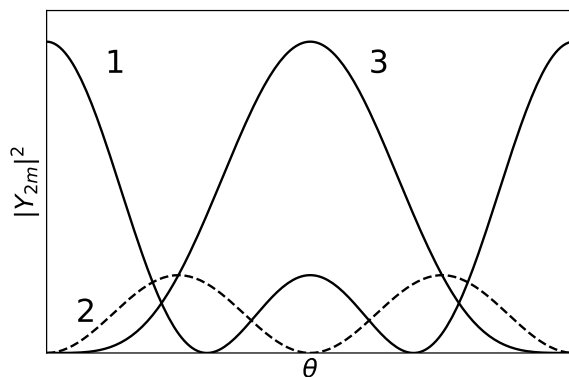
25) Figuren viser $|R_{3l}|^2$ for $l = 0, 1, 2$ for $0 < r < 10a_0$. (Vertikal akse er individuelt skalert for de tre funksjonene.)

Hva er korrekt nummerangivelse?

- A) 1: $|R_{30}|^2$ 2: $|R_{31}|^2$ 3: $|R_{32}|^2$
 B) 1: $|R_{30}|^2$ 2: $|R_{32}|^2$ 3: $|R_{31}|^2$
 C) 1: $|R_{31}|^2$ 2: $|R_{32}|^2$ 3: $|R_{30}|^2$
 D) 1: $|R_{31}|^2$ 2: $|R_{30}|^2$ 3: $|R_{32}|^2$
 E) 1: $|R_{32}|^2$ 2: $|R_{31}|^2$ 3: $|R_{30}|^2$
 F) 1: $|R_{32}|^2$ 2: $|R_{30}|^2$ 3: $|R_{31}|^2$

26) Hvor er radialtettheten $u^2(r) = (rR_{32})^2$ maksimal?

- A) $r = a_0$ B) $r = 3a_0$ C) $r = 5a_0$ D) $r = 7a_0$ E) $r = 9a_0$ F) $r = 11a_0$



27) Figuren viser $|Y_{2m}|^2$ for $m = 0, \pm 1, \pm 2$ for $0 < \theta < \pi$. (Vertikal akse er individuelt skalert for de tre funksjonene.)

Hva er korrekt nummerangivelse?

- A) 1: $|Y_{20}|^2$ 2: $|Y_{2\pm 1}|^2$ 3: $|Y_{2\pm 2}|^2$
 B) 1: $|Y_{20}|^2$ 2: $|Y_{2\pm 2}|^2$ 3: $|Y_{2\pm 1}|^2$
 C) 1: $|Y_{2\pm 1}|^2$ 2: $|Y_{20}|^2$ 3: $|Y_{2\pm 2}|^2$
 D) 1: $|Y_{2\pm 1}|^2$ 2: $|Y_{2\pm 2}|^2$ 3: $|Y_{20}|^2$
 E) 1: $|Y_{2\pm 2}|^2$ 2: $|Y_{20}|^2$ 3: $|Y_{2\pm 1}|^2$
 F) 1: $|Y_{2\pm 2}|^2$ 2: $|Y_{2\pm 1}|^2$ 3: $|Y_{20}|^2$

28) Hvis elektronet befinner seg i tilstanden ψ_{322} ,

hva er vinkelen mellom z -aksen og dreieimpulsvektoren L ?

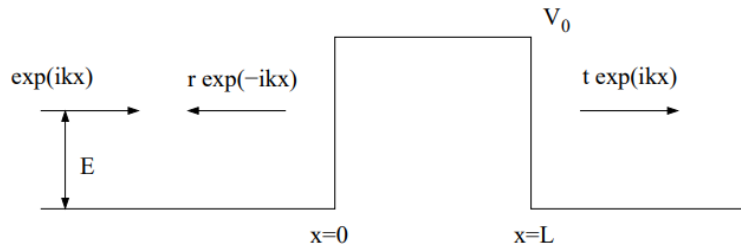
- A) 75° B) 65° C) 55° D) 45° E) 35° F) 25°

29) Elektronet gjennomgår en strålingsovergang fra ψ_{322} til ψ_{211} .

Hva er bølgelengden til det emitterte fotonet?

- A) 756 nm B) 656 nm C) 556 nm D) 456 nm E) 356 nm F) 256 nm

Oppgave 30–32: Tunnelering.



Et elektron kommer inn fra venstre og møter en potensialbarriere med høyde V_0 og bredde L . Elektronet har veldefinert impuls $p_i = \hbar k$ og (kinetisk) energi $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m_e$. Innkommende bølge er $\psi_i(x) = \exp(ikx)$, reflektert bølge er $\psi_r(x) = r \exp(-ikx)$ og transmittert bølge er $\psi_t(x) = t \exp(ikx)$. Det oppgis at transmisjonssannsynligheten for $E \leq V_0$ er

$$T = \left[1 + \frac{\sinh^2 \left(k_0 L \sqrt{1 - E/V_0} \right)}{4(1 - E/V_0) E/V_0} \right]^{-1}$$

og for $E \geq V_0$

$$T = \left[1 + \frac{\sin^2 \left(k_0 L \sqrt{E/V_0 - 1} \right)}{4(E/V_0 - 1) E/V_0} \right]^{-1}.$$

Her er $k_0 = \sqrt{2m_e V_0} / \hbar$.

30) Hva er T for et innkommende elektron som har energi $E = V_0$ når $k_0 = 1.00 \text{ nm}^{-1}$ og $L = 4.00 \text{ nm}$?

- A) 0.10 B) 0.20 C) 0.30 D) 0.40 E) 0.50 F) 0.60

31) Hva er minste verdi for forholdet E/V_0 som gir $T = 1$?

- A) 1.017 B) 1.317 C) 1.617 D) 1.917 E) 2.217 F) 2.517

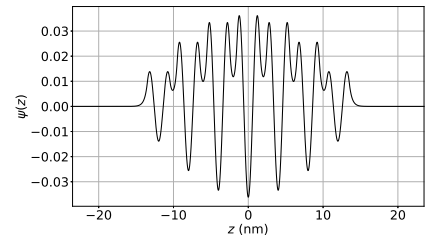
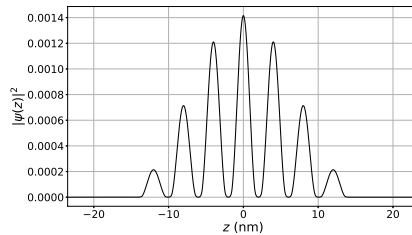
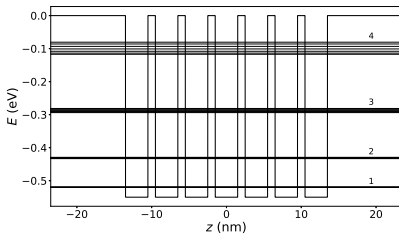
32) Anta at en barriere med samme verdier for V_0 og L plasseres 5.00 nm til høyre for den første, slik at resultatet blir en symmetrisk dobbeltbarriere, med et område med bredde $b = 5.00 \text{ nm}$ og potensial $V = 0$ mellom barrierene. **Hva er laveste elektronenergi E som gir $T = 1$?**

Tips: Resonant tunnelering via stående bølger mellom barrierene.

- A) 5 meV B) 10 meV C) 15 meV D) 20 meV E) 25 meV F) 30 meV

Oppgave 33–35: Supergitter.

En lagdelt halvlederstruktur er opphav til 7 potensialbrønner adskilt av 6 barrierer. Potensialet i brønnene er -550 meV. Potensialet i barrierene er null, det samme som til venstre og til høyre for de 7 brønnene. Hver brønn har bredde 3.00 nm, hver barriere har bredde 1.00 nm. Systemet har 28 bundne (romlige) tilstander $\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_{27}(z)$ fordelt med like mange på 4 energibånd, nummerert og vist med horisontale linjer i figuren til venstre.



33) Figuren i midten viser sannsynlighetstettheten for en av systemets bundne tilstander.
Hva er tilhørende energiverdi?

- A) -0.10 eV B) -0.43 eV C) -0.29 eV D) -0.52 eV E) -0.12 eV F) -0.08 eV

34) Figuren til høyre viser en av systemets bundne tilstander.
Hva er tilhørende energiverdi?

- A) -0.10 eV B) -0.43 eV C) -0.29 eV D) -0.52 eV E) -0.12 eV F) -0.08 eV

35) Strukturen kan fungere som en laser ved at elektroner i bånd nr 2 emitterer fotoner og havner i tilstander i bånd nr 1.

Hva er bølgelengden til disse fotonene?

- A) $30 \mu\text{m}$ B) $26 \mu\text{m}$ C) $22 \mu\text{m}$ D) $18 \mu\text{m}$ E) $14 \mu\text{m}$ F) $10 \mu\text{m}$

Oppgave 36 - 40: Spinn-1/2-tilstander.

36) Dersom normeringskonstanten A velges som et positivt reelt tall, hva er dens verdi for spinntilstanden

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 7 + i \end{pmatrix} ?$$

- A) $1/\sqrt{27}$ B) $1/\sqrt{35}$ C) $1/\sqrt{43}$ D) $1/\sqrt{51}$ E) $1/\sqrt{59}$ F) $1/\sqrt{67}$

37) For hvilken operator er spinntilstanden

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ikke en egentilstand?

- A) \hat{S}_x B) \hat{S}_y C) \hat{S}_x^2 D) \hat{S}_y^2 E) \hat{S}_z^2 F) \hat{S}^2

38) Hva er $\langle S_x \rangle$ for spinntilstanden

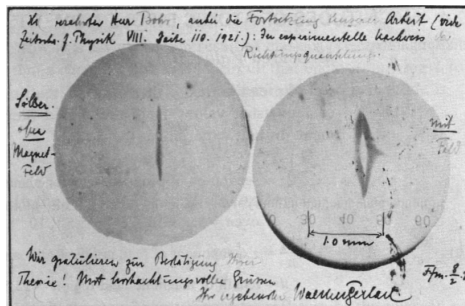
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ?$$

- A) $-\hbar/8$ B) $\hbar/8$ C) $-\hbar/5$ D) $\hbar/5$ E) $-\hbar/2$ F) $\hbar/2$

39) Hva er ΔS_x for spinntilstanden

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} ?$$

- A) $\hbar/6$ B) $\hbar/5$ C) $\hbar/4$ D) $\hbar/3$ E) $\hbar/2$ F) \hbar



40) Hvem fikk dette postkortet fra Walther Gerlach i 1922?

- A) Nils og Blåmann B) Nils Holgersson C) Nils Arne Eggen
 D) Nils Johan Semb E) Niels Bohr F) Nils-Ingvar Aadne