

## TFY4215 Innføring i kvantefysikk Eksamen 10. januar 2023

---

Oppgave 1–3: Stråling.

1) Sammenhengen mellom et legemes temperatur  $T$  og frekvensen  $\nu$  der  $dj/d\nu$  (dvs utsendt effekt pr flateenhet og pr frekvensenhet) har sin maksimale verdi er  $\nu/T = 58.76$  GHz/K. Dette resultatet utledes ved å sette  $d(dj/d\nu)/d\nu = 0$  og løse den transcendent ligningen  $x = 3 - 3e^{-x}$  for den dimensjonsløse størrelsen  $x = h\nu/k_B T$ .

**Hvilken verdi av  $x$  gir best samsvar med at  $\nu/T = 58.76$  GHz/K?**

- A) 4.6      B) 4.0      C) 3.4      D) 2.8      E) 2.2      F) 1.6

2) Ligningen  $x = 3 - 3e^{-x}$  kan løses iterativt, dvs  $x_{i+1} = 3 - 3e^{-x_i}$ , for eksempel med startverdi  $x_0 = 1$  på høyre side.

**Hvor mange ganger må høyre side beregnes for å få verdien av  $x$  med 3 gjeldende sifre?**

- A) 13      B) 11      C) 9      D) 7      E) 5      F) 3

3) Anta at huden til en naken voksen person stråler som et svart legeme med temperatur  $30^\circ\text{C}$ .

**Hva er omtrent total emittert effekt?**

Anslå selv overflatearealet.

- A) 80 mW      B) 8 W      C) 0.8 kW      D) 80 kW      E) 8 MW      F) 0.8 GW

---

4) En partikkel med masse  $m$  beveger seg med hastighet  $v = c/5$ .

**Hva blir omtrent feilen i partikkelens kinetiske energi dersom du regner ikke-relativistisk?**

- A) 3%      B) 5%      C) 7%      D) 9%      E) 11%      F) 13%
-

Oppgave 5–9: Partikkel i boks.

Et elektron er begrenset til å bevege seg i en dimensjon, mellom  $x = 0$  og  $x = L = 32 \text{ \AA}$ . Potensialet er  $V = 0$  for  $0 < x < L$  og  $V = \infty$  ellers.

5) Hva er elektronets bølgelengde i 3. eksiterte tilstand?

- A)  $32 \text{ \AA}$     B)  $48 \text{ \AA}$     C)  $64 \text{ \AA}$     D)  $24 \text{ \AA}$     E)  $8 \text{ \AA}$     F)  $16 \text{ \AA}$

6) Hva er bølglengden til et foton som emitteres når elektronet gjennomgår en strålingsovergang fra 3. eksiterte tilstand til grunntilstanden?

- A)  $1.1 \mu\text{m}$     B)  $1.7 \mu\text{m}$     C)  $2.3 \mu\text{m}$     D)  $2.9 \mu\text{m}$     E)  $3.5 \mu\text{m}$     F)  $4.1 \mu\text{m}$

7) Med normert starttilstand  $\Psi(x, 0) = 1/\sqrt{L}$ ,  
hva er sannsynligheten for at en måling av elektronets energi gir verdien  $E_3$ ?

- A) 0.01    B) 0.03    C) 0.05    D) 0.07    E) 0.09    F) 0.11

8) Anta at elektronet ved tidspunktet  $t = 0$  er preparert i en starttilstand beskrevet ved den normerte bølgefunksjonen

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{1}{L}} \exp(i\pi x/L).$$

Hva er sannsynligheten for at en måling av elektronets energi gir verdien  $E_2$ ?

Oppgitt:  $\int \cos z \sin 2z dz = -\frac{2}{3} \cos^3 z$

- A) 0.26    B) 0.36    C) 0.46    D) 0.56    E) 0.66    F) 0.76

9) Anta nå at elektronet beskrives av den ikke-stasjonære (men normerte) bølgefunksjonen

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad \text{med} \quad c_n = \frac{3\sqrt{10}}{n^2 \pi^2}.$$

Hva er forventningsverdien  $\langle E \rangle$  av partikkelens energi?

Oppgitt:  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$

- A) 22 meV    B) 33 meV    C) 44 meV    D) 55 meV    E) 66 meV    F) 77 meV

Oppgave 10–14: Molekylet CO.

Vibrasjonsfrihetsgraden til CO (karbonmonoksid) kan ved lave og moderate temperaturer beskrives ganske godt med potensialet  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ , der  $x$  representerer utsvinget fra likevekt, dvs forlengelsen ( $x > 0$ ) eller forkortelsen ( $x < 0$ ) av bindingslengden mellom C og O. Bindingslengden i CO i likevekt er 143 pm. Molekylets reduserte masse er  $m = 6.86u$ . Fjærkonstanten er  $k = m\omega^2 = 1860$  N/m.

**10) Hva er maksimalt klassisk utsving fra likevekt når molekylet vibrerer i grunntilstanden  $\psi_0(x)$  med vibrasjonsenergi  $\hbar\omega/2$ ?**

- A) 5.4 pm    B) 4.8 pm    C) 4.2 pm    D) 3.6 pm    E) 3.0 pm    F) 2.4 pm

**11) Anta at strålingsoverganger bare kan skje mellom vibrasjonsnivåer med energi  $E_n$  og  $E_{n\pm 1}$ . Hva er bølgelengden til et emittert eller absorbert foton i en slik prosess?**

- A) 5.5  $\mu\text{m}$     B) 4.7  $\mu\text{m}$     C) 3.9  $\mu\text{m}$     D) 3.1  $\mu\text{m}$     E) 2.3  $\mu\text{m}$     F) 1.5  $\mu\text{m}$

**12) Boltzmannfaktoren  $\exp(-\hbar\omega/k_B T)$  gir forholdet mellom sannsynligheten for å finne oscillatoren henholdsvis i 1. eksiterte tilstand og i grunntilstanden.**

**Hvor stort er dette forholdet for CO-molekylet ved romtemperatur (300 K)?**

- A)  $8.0 \cdot 10^{-6}$     B)  $7.1 \cdot 10^{-7}$     C)  $6.2 \cdot 10^{-2}$     D)  $5.3 \cdot 10^{-3}$     E)  $4.4 \cdot 10^{-4}$     F)  $3.5 \cdot 10^{-5}$

**13) Et mer realistisk potensial for å beskrive vibrasjonsbevegelsen i CO-molekylet er**

$$V_M(x) = V_0 (1 - e^{-x/\xi})^2,$$

det såkalte Morse-potensialet. For små utsving fra likevekt,  $|x| \ll \xi$ , sammenfaller  $V_M(x)$  med det harmoniske potensialet  $V(x)$ . Med  $V_0 = 11.1$  eV,

**hvilken verdi av  $\xi$  gir samsvar mellom  $V_M(x)$  og  $V(x)$  i grensen  $|x| \ll \xi$ ?**

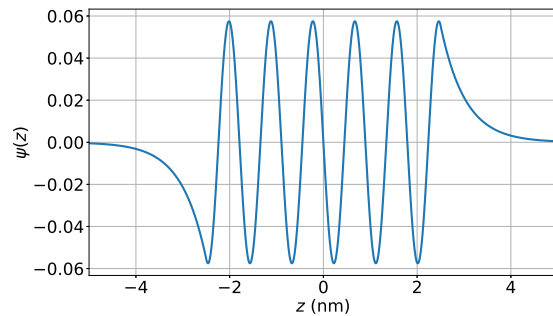
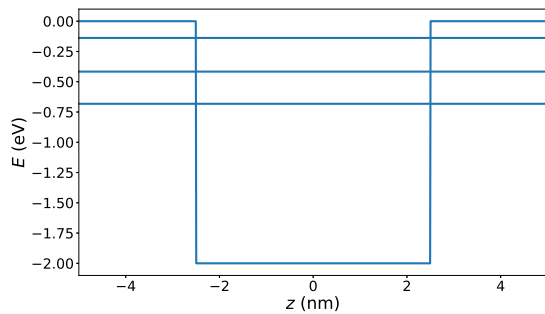
- A) 34.6 pm    B) 43.7 pm    C) 52.8 pm    D) 61.9 pm    E) 70.0 pm    F) 79.1 pm

**14) Som sagt er bindingslengden i likevekt i CO 143 pm. Dersom vi betrakter molekylet som en stiv rotator, hva er energiforskjellen mellom laveste og nest laveste rotasjonstilstand? Oppgitt: C og O har masse hhv ca  $12u$  og  $16u$ .**

- A) 0.3 eV    B) 0.3 meV    C) 0.3  $\mu\text{eV}$     D) 0.3 neV    E) 0.3 peV    F) 0.3 feV

Oppgave 15–17: Elektron i endelig potensialbrønn.

En potensialbrønn har dybde 2.00 eV og bredde 5.00 nm. Potensialet er illustrert i figuren til venstre, sammen med energien til de 3 øverste bundne tilstandene (horisontale linjer).



15) Tilstanden som vises i figuren til høyre er den bundne tilstanden med høyest energi,  $E = -138$  meV. **Hvor mange bundne tilstander er det i denne potensialbrønnen?**

- A) 6    B) 8    C) 10    D) 12    E) 14    F) 16

16) Hva er kinetisk energi for et elektron i potensialbrønnens grunntilstand?

- A) 63 meV    B) 53 meV    C) 43 meV    D) 33 meV    E) 23 meV    F) 13 meV

17) Bølgefunksjonen i figuren til høyre avtar eksponentielt i det klassisk forbudte området, på formen  $\exp(-\kappa z)$ .

**Hva er verdien av  $\kappa$ , i enheten  $\text{nm}^{-1}$ ?**

- A) 1.5    B) 1.9    C) 2.3    D) 2.7    E) 3.1    F) 3.5

Oppgave 18–23: Isotrop todimensjonal harmonisk oscillator.

En isotrop todimensjonal harmonisk oscillator,  $V(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$ , har tillatte energier  $E_N = (N + 1)\hbar\omega$ , med  $N = n_x + n_y$ , der  $n_x, n_y = 0, 1, \dots$ . Energieigenfunksjonene er

$$\psi_{n_x n_y}(x, y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y),$$

dvs på produktform, med funksjoner av  $x$  og  $y$  som i formelvedlegget.

**18) Hva er (den "orbitale") degenerasjonsgraden til energinivået  $E_8$ ?**

- A) 7    B) 5    C) 6    D) 8    E) 10    F) 9

**19) Hva er  $L^2$  for en partikkel i tilstanden  $\psi_{10}$ ?** (Dvs  $n_x = 1$  og  $n_y = 0$ .)

- A) Null    B)  $\hbar^2/4$     C) Uskarp    D)  $\hbar^2/2$     E)  $\hbar^2$     F)  $2\hbar^2$

**20) Hva er  $L_z$  for en partikkel i tilstanden  $\psi_{10}$ ?**

- A) Null    B)  $\hbar/4$     C) Uskarp    D)  $\hbar/2$     E)  $\hbar$     F)  $2\hbar$

**21) Hva er  $\langle L_z \rangle$  for en partikkel i tilstanden  $\psi_{11}$ ?**

- A) Null    B)  $\hbar/4$     C) Uskarp    D)  $\hbar/2$     E)  $\hbar$     F)  $2\hbar$

**22) Hvilken tilstand (ikke normert) har  $L_z = \hbar$ ?**

- A)  $\psi_{00} + \psi_{11}$     B)  $\psi_{00} + i\psi_{11}$     C)  $\psi_{10} + \psi_{01}$   
D)  $\psi_{10} + i\psi_{01}$     E)  $\psi_{20} + \psi_{02}$     F)  $\psi_{20} + i\psi_{02}$

**23) Tolv identiske fermioner, uten innbyrdes vekselvirkning, med spinn  $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$  og  $s = 1/2$  befinner seg i dette todimensjonale oscillatorpotensialet. Hva er systemets totale energi i grunntilstanden?**

- A)  $12\hbar\omega$     B)  $20\hbar\omega$     C)  $28\hbar\omega$     D)  $36\hbar\omega$     E)  $44\hbar\omega$     F)  $52\hbar\omega$
-

Oppgave 24–26: Elektron(er) i todimensjonal boks.

Energivåene for elektroner (fermioner; to spinntilstander for hver romlige orbital) i en todimensjonal kubisk boks med sidekanter  $L$  er

$$E = E_0 (n_x^2 + n_y^2).$$

Her er  $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L^2}$ , og kvantetallene  $n_x, n_y$  er positive heltall.

**24) Hva er total degenerasjonsgrad (inklusive spinndegenerasjon) til energinivået  $74E_0$ ?**

- A) 4    B) 6    C) 8    D) 10    E) 12    F) 14

**25) Hvor mange elektroner med energi mindre enn  $12E_0$  kan vi ha i denne todimensjonale boksen?**

- A) 8    B) 10    C) 12    D) 14    E) 16    F) 18

**26) Anta at boksen har sidekanter  $L = 3.00$  nm og inneholder 12 ikkevekselvirkende elektroner. Hva er disse elektronenes totale energi når systemet er i sin grunntilstand?**

- A) 2.3 eV    B) 3.3 eV    C) 4.3 eV    D) 5.3 eV    E) 6.3 eV    F) 7.3 eV

---

Oppgave 27–29: Hydrogenatomet.

Et elektron befinner seg i en av energiegentilstandene i hydrogenatomet,

$$\psi_{321}(\mathbf{r}) = R_{32}(r)Y_{21}(\theta, \phi)$$

med radialfunksjon

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \exp(-r/3a_0)$$

og med  $Y_{21}$  som i formelvedlegget.

**27) For hvilke verdier av  $r$  og  $\theta$  er  $|\psi_{321}|^2$  maksimal?**

- A)  $r = 6a_0, \theta = \pi/4 \pm \pi/8$     B)  $r = 9a_0, \theta = \pi/4 \pm \pi/8$     C)  $r = 6a_0, \theta = \pi/3 \pm \pi/6$   
D)  $r = 9a_0, \theta = \pi/3 \pm \pi/6$     E)  $r = 6a_0, \theta = \pi/2 \pm \pi/4$     F)  $r = 9a_0, \theta = \pi/2 \pm \pi/4$

**28) Hva er vinkelen mellom  $z$ -aksen og elektronets dreieimpulsvektor  $L$ ?**

- A)  $88^\circ$     B)  $77^\circ$     C)  $66^\circ$     D)  $55^\circ$     E)  $44^\circ$     F)  $33^\circ$

29) Elektronet gjennomgår en strålingsovergang fra  $\psi_{321}$  til  $\psi_{432}$ .

Hva er bølgelengden til det absorberte fotonet?

- A)  $3.1 \mu\text{m}$     B)  $2.7 \mu\text{m}$     C)  $2.3 \mu\text{m}$     D)  $1.9 \mu\text{m}$     E)  $1.5 \mu\text{m}$     F)  $1.1 \mu\text{m}$

---

Oppgave 30–31: Kollisjon med potensialtrinn.

Et elektron kommer inn fra venstre og møter i posisjon  $x = 0$  et potensialtrinn med høyde  $V_0 > 0$ . Mer presist er potensialet  $V(x) = 0$  for  $x < 0$  og  $V(x) = V_0$  for  $x > 0$ . Det innkommende elektronet har veldefinert impuls  $p_i = \hbar k$  og (kinetisk) energi  $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m_e$ . Innkommende bølge er  $\psi_i(x) = \exp(ikx)$ , mens reflektert bølge er  $\psi_r(x) = r \exp(-ikx)$ . I området  $x > 0$  er bølgefunksjonen  $\psi_t(x) = t \exp(iqx)$  hvis  $E > V_0$  og  $\psi_t(x) = t \exp(-\kappa x)$  hvis  $E < V_0$ . Her er  $q^2 = 2m_e(E - V_0)/\hbar^2$  og  $\kappa^2 = 2m_e(V_0 - E)/\hbar^2$ .

30) Hva er refleksjonssannsynligheten når  $E = V_0/2$ ?

- A) 0.0    B) 0.2    C) 0.4    D) 0.6    E) 0.8    F) 1.0

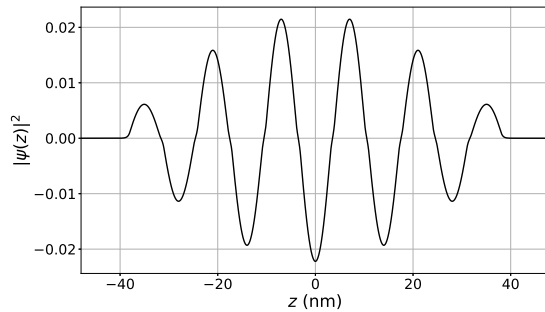
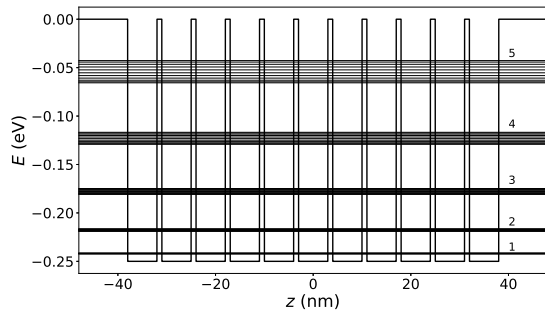
31) Dersom  $E > V_0$ , er refleksjonssannsynligheten  $R = (k - q)^2 / (k + q)^2$ .

Hvor stor er transmisjonssannsynligheten når  $E = 2V_0$ ?

- A) 0.97    B) 0.87    C) 0.77    D) 0.67    E) 0.57    F) 0.47

Oppgave 32–33: Supergitter.

En lagdelt halvlederstruktur er opphav til 11 potensialbrønner adskilt av 10 barrierer. Potensialet i brønnene er  $-250$  meV. Potensialet i barrierene er null, det samme som til venstre og til høyre for de 11 brønnene. Hver brønn har bredde  $6.00$  nm, hver barriere har bredde  $1.00$  nm. Systemet har 55 bundne (romlige) tilstander  $\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_{54}(z)$  fordelt med like mange på 5 energibånd, nummerert og vist med horisontale linjer i figuren til venstre.



32) Figuren til høyre viser en av systemets bundne tilstander.

Hva er tilhørende energieigenverdi?

- A)  $-218$  meV    B)  $-242$  meV    C)  $-179$  meV  
 D)  $-120$  meV    E)  $-43$  meV    F)  $-65$  meV

33) Et elektron i bånd nr 2 emitterer et foton og havner i en av tilstandene i bånd nr 1.

Hva er omtrent fotonets bølgelengde?

- A)  $12 \mu\text{m}$     B)  $22 \mu\text{m}$     C)  $32 \mu\text{m}$     D)  $42 \mu\text{m}$     E)  $52 \mu\text{m}$     F)  $62 \mu\text{m}$

Oppgave 34–35: Kommutatorer.

34) Hva er kommutatoren  $[z, \hat{p}_z]$ ?

- A) Null    B)  $iz$     C)  $1/\hbar$     D)  $-\hbar$     E)  $i\hbar$     F)  $i/z$

35) Hva er kommutatoren  $[\hat{L}_z, \hat{p}_z]$ ?

- A) Null    B)  $iz$     C)  $1/\hbar$     D)  $-\hbar$     E)  $i\hbar$     F)  $i/z$



Oppgave 36–40: Spinn-1/2-tilstander.

36) Hvilken verdi av  $A$  normerer spinntilstanden

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} ?$$

- A)  $1/\sqrt{12}$     B)  $1/\sqrt{24}$     C)  $1/\sqrt{48}$     D)  $1/\sqrt{74}$     E)  $1/\sqrt{88}$     F)  $1/\sqrt{144}$

37) Hva er  $S_y$  for spinntilstanden

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

- A)  $\hbar$     B)  $-\hbar$     C)  $\hbar/2$     D)  $-\hbar/2$     E) Uskarp    F) Null

38) Hva er  $S_x$  for spinntilstanden

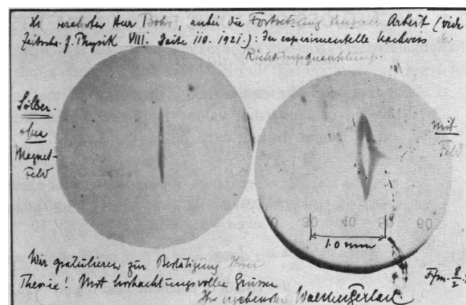
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

- A)  $\hbar$     B)  $-\hbar$     C)  $\hbar/2$     D)  $-\hbar/2$     E) Uskarp    F) Null

39) Hva er  $\Delta S_z$  for spinntilstanden

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

- A)  $\hbar/4$     B)  $\hbar/3$     C)  $\hbar/2$     D)  $2\hbar$     E)  $3\hbar$     F)  $4\hbar$



40) Hvem sendte dette postkortet til Niels Bohr i 1922?

- A) Tom og Jerry    B) Romeo og Julie    C) Fiinbeck og Fia  
D) Tidemand og Gude    E) Wallace og Gromit    F) Stern og Gerlach