TFY4215/FY1006 Innføring i kvantefysikk Eksamen 10. juni 2017

LØSNINGSFORSLAG

1) **C**: $E = h\nu = hc/\lambda = 1.2\,\mu$eV

2) **E**: $E = p^2/2m_e = h^2/2m_e\lambda^2 = 1.5$ eV

3) **A**: $m = (284\cdot 12 + 190 + 320\cdot 19 + 4\cdot 14 + 12\cdot 32)u = 10118u = 1.68\cdot 10^{-23}$ kg $\Rightarrow \lambda = h/p = h/mv = 0.46$ pm

4) **A**: $\lambda = h/p = hc/\sqrt{E^2 - m^2c^4} = hc/\sqrt{K(K+2mc^2)} = 2.5$ pm. En ikkerelativistisk beregning gir omtrent samme svar (litt større λ).

5) **D**: $\lambda = hc/E = 1.54$ Å

6) **B**: $v = h/m_n\lambda = 387$ m/s

7) **B**: $\lambda = h/p \simeq h/\sqrt{2m_nK} = 2.85$ fm. En relativistisk beregning (se oppgave 4) gir 2.8 fm.

8) **D**: $W = h\nu = hc/\lambda \Rightarrow W_{\min} = hc/\lambda_{\max} = 4.36$ eV og $W_{\max} = hc/\lambda_{\min} = 4.95$ eV

9) **A**: Med $T \simeq 293$ K har vi $\lambda_m = hc/4.965k_BT = 10\,\mu$m

10) **C**: $K = E - V = E + e^2/4\pi\varepsilon_0 r = -13.6 + 27.2 = 13.6$ eV

11) **B**: $\lambda = 2\pi/k = (2\pi/25)$ nm $= 0.25$ nm

12) **E**: $E = p^2/2m_e = \hbar^2k^2/2m_e = 24$ eV

13) **A**: $v = p/m_e = \hbar k/m_e = 0.0096c \simeq 0.01c$

14) **D**: $v_1 = \hbar k_1/m_e = \hbar\pi/m_eL = 72$ km/s

15) **B**: $\Delta p \geq \hbar/2\Delta x \geq \hbar/(2\cdot L/2) = \hbar/L$

16) **B**: $\lambda = hc/(E_2 - E_1) = hc/(3\pi^2\hbar^2/2m_eL^2) = 28\,\mu$m

17) **D**: $P_3 = |c_3|^2 = \left(\int_0^L \psi_3^*(x)\Psi(x,0)dx\right)^2 = \frac{2\cdot 8\cdot L^2}{L\cdot 3L\cdot\pi^2}\left(\int_0^\pi \sin 3z \sin^2 z dz\right)^2 = 256/675\pi^2 = 0.038$

18) **C**: $\langle E\rangle = E_1/16 + 4E_1/4 + 9E_1\cdot 3/8 + 16E_1/4 + 25E_1/16 = 10E_1 = 5\pi^2\hbar^2/m_eL^2$

19) **C**: $\hbar\omega/2 \geq m\omega^2x^2/2 \Rightarrow -\sqrt{\hbar/m\omega} \leq x \leq \sqrt{\hbar/m\omega}$

20) **A**: Bare A har riktig enhet. Med litt regning: $\langle x\rangle = 0 \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle} = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-m\omega x^2/\hbar)dx\right)^{1/2} = \sqrt{\hbar/m\omega\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} z^2\exp(-z^2)dz\right)^{1/2} = \sqrt{\hbar/m\omega\sqrt{\pi}}\cdot\pi^{1/4}/\sqrt{2} = \sqrt{\hbar/2m\omega}$

21) **B**: $E = 2\cdot\hbar\omega/2 + 2\cdot 3\hbar\omega/2 + 2\cdot 5\hbar\omega/2 + 2\cdot 7\hbar\omega/2 + 9\hbar\omega/2 = 41\hbar\omega/2$

22) **C**: Må ha kvantetall 1, 3 og 3 for å få kvadratsum lik 19. Dette gir orbital degenerasjon 3, som kombinert med spinndegenerasjon 2 gir total degenerasjon 6.

23) **A**: $[\widehat{L}_z, z] = [x\widehat{p}_y - y\widehat{p}_x, z] = 0$

24) **D**: $[\widehat{L}_z, x] = [x\widehat{p}_y - y\widehat{p}_x, x] = i\hbar y$

25) **E**: Dette er grunntilstanden i et kombinert bokspotensial mhp z-retningen og en isotrop harmonisk oscillator mhp x- og y-retningen, slik at $E = 2 \cdot \hbar\omega/2 + \pi^2\hbar^2/2mL^2$

26) **A**: E øker med antall nullpunkter: $E_A < E_B < E_C$

27) **B**: Alle tre ψ krummer bort fra x-aksen også i barriereområdet, slik at alle tre har $E < V_0$

28) **C**: Vi lar indeks 0 angi områdene med $V = 0$ og indeks 1 områdene med $V = V_0$. Dermed: $E/(E-V_0) = (\lambda_1/\lambda_0)^2 = (10/5)^2 = 4$ slik at $E = 4V_0/3 = 0.40$ eV

29) **E**: I alle områdene er $P = \langle\rho\rangle L = (\rho_{\max}/2)L$. Her er ρ den plottede sannsynlighetstettheten. Fra figuren anslår vi da $P_0 \simeq 3 \cdot (1/2) \cdot 0.00035 \cdot 5$ og $P_1 \simeq 2 \cdot (1/2) \cdot 0.00145 \cdot 5$ slik at $P_1/P_0 \simeq 2.8$

30) **D**: 7 nullpunkter betyr 7. eksiterte tilstand og dermed 7 med lavere energi.

31) **A**: $\widehat{L}_x Y_{p_x} = 0 \Rightarrow L_x = 0$

32) **E**: Y_{p_x} er ikke egenfunksjon til $\widehat{L}_z \Rightarrow L_z$ er uskarp

33) **E**: $Y_{p_x} \sim \sin\theta\cos\phi$ slik at $|\psi|^2$ er maksimal for $\theta = \pi/2$ og $\phi = 0$ eller π, dvs på x-aksen. Deriverer R_{21} og setter lik null og finner $r = x = \pm 2a_0$

34) **D**: $\lambda = hc/(E_3 - E_2)$, der $E_2 = -13.6/4$ eV og $E_3 = -13.6/9$ eV. Dermed er $\lambda = 656$ nm

35) **C**: $I = 2 \cdot (12 \cdot (1.203/2)^2 + 1 \cdot 1.6615^2) = 14.20$ uÅ^2= $2.358 \cdot 10^{-46}$ kgm^2 $\Rightarrow \Delta E_{10} = \hbar^2/I = 0.3$ meV

36) **B**: Molekyl med N atomer har i alt $3N$ frihetsgrader fordelt på translasjon (3), rotasjon (2 for lineære molekyler, 3 ellers) og vibrasjon ($3N-5$ for lineære molekyler, $3N-6$ ellers). Dermed: $N_a = 12 - 5 = 7$ og $N_v = 12 - 6 = 6$

37) **A**: E øker med antall nodeplan $\Rightarrow E_B < E_D < E_A < E_C$

38) **B**: Ψ skifter fortegn i A og B når $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$, det gjør Ψ ikke i C og D.

39) **A**: Nær $x = d$ er $V_M(x) \simeq V_0\kappa^2(x-d)^2$ som er harmonisk oscillator med $m\omega^2 = 2V_0\kappa^2$. Her er m den reduserte massen for de to CH-enhetene, dvs $m = 13u \cdot 13u/(13u+13u) = 6.5u$, slik at $\hbar\omega = \hbar\sqrt{2V_0\kappa^2/m} = 244$ meV

40) **D**: Siden $E'(x)/E_0 = 4x^3 - 3x^2 - 28x$, har energiprofilen stasjonære punkter for $x = 0$ og $4x^2 - 3x - 28 = 0$, dvs $x = (3 \pm \sqrt{457})/8 \simeq -2.30$ og 3.05. De to sistnevnte representerer hhv vinyliden og acetylen, med $\phi \simeq 20°$ og $\phi \simeq 180°$, så $x = 0$ må være transisjonstilstanden, dvs $\phi_{\text{TS}} = 90°$. ($E''(0)/E_0 = -28 < 0$ dvs et maksimumspunkt, som TS skal være.)

41) **D**: Her er vel det enkleste å sette inn $\phi = 20°$ for vinyliden, dvs $x_v = -2.33$, som gir $E_v \simeq -1.1$ eV, og deretter $\phi = 90°$ for TS, dvs $x_{\text{TS}} = 0$, som gir $E_{\text{TS}} = 0$. Aktiveringsenergien er følgelig 1.1 eV. (Den eksakte verdien for x_v gir samme verdi, med to gjeldende siffer.)

42) **E**: Tilsvarende kan vi her bruke $\phi = 180°$ for acetylen, dvs $x_a = 3$, som gir $E_a = -72/30 \simeq -2.4$ eV. Det gir en energiforskjell 1.3 eV mellom vinyliden og acetylen. (Også her gir den eksakte verdien for x_a samme resultat med to gjeldende siffer.)

43) **B**: r og t er amplitudene for hhv refleksjon og transmisjon, generelt komplekse størrelser. Det er $R = |r|^2$ og $T = |t|^2$ som gir sannsynligheten for hhv refleksjon og transmisjon.

44) **B**: Med fravær av uendelige sprang i $V(x)$ har vi alltid kontinuerlige $\psi(x)$ og $d\psi/dx$ overalt.

45) **C**: $T(E = V_0) = (1 + k^2L^2/4)^{-1}$ med $k^2 = 2m_eE/\hbar^2 = 7.9325 \cdot 10^{18}$ m^{-2}. Dette gir $T = (1 + 1.983)^{-1} = 0.34$

46) **D**: $T = 1$ for $\sin qL = 0 \Rightarrow qL = n\pi$, med $n \geq 1$. ($n = 0$ og dermed $q = 0$ gir ikke $T = 1$.) Minste verdi for E har vi med $n = 1$, dvs $E = V_0 + \pi^2\hbar^2/2m_eL^2 = 0.30 + 0.37 = 0.67$ eV.

47) **A**: Med $\kappa L \gg 1$ er $\sinh^2 qL \sim \exp(2\kappa L) \gg 1$, slik at $T \sim \exp(-2\kappa L)$. Dermed er $\xi = 1/2\kappa = (2\sqrt{2m_e(V_0 - E)}/\hbar)^{-1} = 0.18$ nm

48) **A**: Laveste resonans innebærer *nesten* en halv bølgelengde på brønnens utstrekning ($\lambda/2$ er litt større enn brønnbredden, siden det ikke er helt ugjennomtrengelige barrierer). Dermed *ingen* nullpunkter.

49) **C**: Situasjonen er nesten den samme som for en partikkel i boks, slik at resonansenergiene øker kvadratisk med n, dvs $E_n \sim n^2$. Det betyr at $E_2 \simeq 4E_1 = 32$ meV.

50) **E**: Siden resonansenergiene øker kvadratisk med n, blir kriteriet $n^2 \cdot 8 < 300$, dvs $n < \sqrt{300/8} = 6.12$; følgelig 6 resonanser under 300 meV.