TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag til Eksamen 3. juni 2019

1) **D**
Med energinivåer $E_n = -13.6\,\text{eV}/n^2$, fotonenergi $h\nu = hc/\lambda$ og tallverdien (fra formelarket) $hc = 1237$ eV nm har vi

$$\lambda = \frac{hc}{E_9 - E_6} = \frac{1237}{13.6/36 - 13.6/81} = 5894 \text{ nm} \simeq 6\,\mu\text{m}.$$

2) **E**

$$mc^2 = (pc)^2/2K = (1.76 \text{ GeV})^2/(2 \cdot 12.4 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}) = 125 \text{ GeV}.$$

3) **E**

$$\lambda = h/p = hc/pc = (1237 \cdot 10^{-9} \text{ eV m})/(1.76 \cdot 10^9 \text{ eV}) = 7.03 \cdot 10^{-16} \text{ m} \simeq 0.7 \text{ fm}.$$

4) **D**

$$v = \sqrt{2E_3/m_e} = 3\pi\hbar/m_e L = 362 \cdot 10^3 \text{ m/s} \simeq 360 \text{ km/s}.$$

5) **E**

$$hc/\lambda = E_3 - E_2 = 5\pi^2\hbar^2/2m_e L^2$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = hc \cdot 2m_e L^2/5\pi^2\hbar^2 \simeq 6\,\mu\text{m}.$$

6) **A**

$$P_1 = |c_1|^2 = 1 - |c_2|^2 - |c_3|^2 = 1 - 2/9 - 2/3 = 1/9 = 11\%.$$

7) **B**

$$c_2 = \int_0^L \psi_2^*(x)\Psi(x,0)dx = \frac{2\sqrt{2}}{L}\int_0^{L/2} \sin^2(2\pi x/L)dx = \frac{2\sqrt{2}}{L} \cdot \frac{L}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

siden integralet er middelverdien av $\sin^2(2\pi x/L)$, som er $1/2$, ganget med lengden $L/2$. Dermed blir $P_2 = |c_2|^2 = 1/2 = 50\%$.

8) **B**
Av erfaring vet vi at hver bundet tilstand i en enkelt brønn gir opphav til to bundne tilstander med omtrent lik energi i en slik dobbelbrønn, der de to brønnene er adskilt av en forholdsvis høy og tykk barriere. Hver horisontale linje representerer altså to bundne tilstander. Dermed ligger 5. (og 4.) eksiterte tilstand like over verdien 2.5 eV. Da må riktig svar være 2.6 eV.

9) **B**
Med $V = 0$ er $E = K = h^2/2m_e\lambda^2$. Figuren viser at den heltrukne kurven illustrerer 4. eksiterte tilstand (4 nullpunkter) mens den stiplede illustrerer 9. eksiterte tilstand. Med $\lambda_9 = 459$ pm og $\lambda_4 = 753$ pm har vi da:

$$hc/\lambda = E_9 - E_4 = (h^2/2m_e) \cdot (1/\lambda_4^2 - 1/\lambda_9^2).$$

Innsetting av tallverdier gir fotonet en bølgelengde $\lambda = 277$ nm.

10) **B**
I et klassisk forbudt område med konstant potensial avtar $\psi(x)$ eksponentielt med x: $\psi(x) = C\exp(-\kappa x)$. Dermed er $\ln\psi = \ln C - \kappa x$, dvs en rett linje med stigningstall $-\kappa$. Fra figuren og gitte opplysninger har vi da:

$$\kappa = -\frac{\Delta \ln\psi}{\Delta x} = \frac{6}{393 \text{ pm}} = 1.527 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}.$$

Videre er $V_0 - E = \hbar^2\kappa^2/2m_e$, som med tallverdier innsatt gir $E = 1.18 \simeq 1.2$ eV.

11) **E**
8 elektroner trenger 4 "orbitaler". I figuren i oppgave 8 er det 2 orbitaler med energi betydelig mindre enn 1 eV og 2 orbitaler med energi litt mer enn 1 eV. Hvis vi anslår øvre skranker hhv 0.5 eV og 1.3 eV, må total energi i grunntilstanden være mindre enn $4\cdot 0.5 + 4\cdot 1.3 = 7.2$ eV. Da er bare 6 eV et realistisk forslag.

12) **A**
$\psi(x)$ har 3 nullpunkter og er dermed 3. eksiterte tilstand. Da er det klart at dette er en tilstand (langt nede i) laveste energibånd, og eneste brukbare alternativ er 0.55 eV.

13) **B**
Fra figuren leser vi av at bølgelengden er 10 nm. Da blir $k = 2\pi/\lambda = 0.63$ nm^{-1}.

14) **C**
120 elektroner trenger 60 "orbitaler". Hvert energibånd inneholder 20 orbitaler. Dermed er alle tilstander i de 3 laveste energibåndene fylt mens alle med høyere energi er tomme. Båndgapet blir differansen mellom bunnen av 4. bånd og toppen av 3. bånd, ca 3.2 eV.

15) **D**
Lyshastigheten i vakuum inneholder enhetene meter og sekund og inngår i definisjonen av førstnevnte. (Sammen med den eksakte frekvensverdien til en bestemt overgang i cesium.)

16) **C**
$\omega^2 = k/\mu$ slik at $k = 4\pi^2\nu^2\mu = 213$ N/m.

17) **A**
Klassisk tillatt område tilsvarer $E \geq V$. Dermed klassiske vendepunkter der $E = V$, som for grunntilstanden betyr $\hbar\omega/2 = \mu\omega^2(x-d)^2/2$, dvs $x = d \pm \sqrt{\hbar/\mu\omega} = d \pm 4$ pm.

18) **C**
$N_1/N_0 = \exp(-\hbar\omega/k_BT)$. Her er $\hbar\omega = h\nu = 23.7$ meV mens $k_BT = 25$ meV (ved 300 K), slik at $N_1/N_0 = 0.40$.

19) **D**
$\Delta K = K_1 - K_0 = \hbar^2/I_0$ med $I_0 = 2 \cdot m_{\text{Au}} \cdot (d/2)^2 (= \mu d^2) = 601\ u\text{Å}^2 = 1.00 \cdot 10^{-44}$ kgm^2. Dermed blir $\Delta K = 1.1 \cdot 10^{-24}$ J $= 6.9$ μeV.

20) **A**
For en gitt verdi av n_x er det kun en mulig verdi for n_y, nemlig $N - n_x$. Og de mulige verdiene for n_x er 0, 1, ..., N, dvs $N+1$ muligheter.

21) **D**
ψ_{01} er proporsjonal med y, dvs med $\sin\phi$; ellers bare konstanter og r-avhengige funksjoner. Det betyr at ψ_{01} er en lineærkombinasjon av to egenfunksjoner til $\hat{L}_z$, der den ene inneholder $\exp(i\phi)$ og den andre $\exp(-i\phi)$, dvs med egenverdier hhv $\hbar$ og $-\hbar$. Dermed er ψ_{01} ikke en egenfunksjon til $\hat{L}_z$, men den *er* egenfunksjon til $\hat{L}^2 = \hat{L}_z^2$, med egenverdi $\hbar^2$. Altså er $|L| = \hbar$.

22) **E**
Som fastslått i forrige oppgave: ψ_{01} er ikke en egenfunksjon til $\hat{L}_z$, slik at L_z er uskarp.

23) **B**
De to egenfunksjonene til $\hat{L}_z$ inngår med lik "vekt" i ψ_{01}. Da er det like stor sjanse for at en måling av L_z vil gi resultatet $\hbar$ som $-\hbar$. Følgelig er forventningsverdien null.

24) **C**
Det er $\exp(-i\phi)$ som er egenfunksjon til $\hat{L}_z$ med egenverdi $-\hbar$, og siden $\exp(-i\phi) = \cos(\phi) - i\sin\phi = x/r - iy/r$, må vi bruke $\psi_{10} - i\psi_{01}$.

25) **A**
2 elektroner i hver av orbitalene ψ_{00}, ψ_{10}, ψ_{01}, ψ_{11}, ψ_{20} og ψ_{02} gir en totalenergi $E = 2\cdot 1\hbar\omega + 4\cdot 2\hbar\omega + 6\cdot 3\hbar\omega = 28\hbar\omega$.

26) **A**
Enklest å regne ut j for $x > 0$, der $j = j_t = \mathrm{Re}\,[\psi_t^*(\hbar/im)(d/dx)\psi_t] = |t|^2\hbar q/m$.

27) **D**
Med ψ_i og ψ_r i område med samme kinetiske energi, og dermed samme verdi for $|k|$ er $R = |r|^2$. Videre er $k \sim \sqrt{E}$ og $q \sim \sqrt{E+V_0}$; resterende faktor $\sqrt{2m}/\hbar$ er felles og kan forkortes overalt. Med $E = V_0/5$ og $E + V_0 = 6V_0/5$ har vi $R = (\sqrt{1} - \sqrt{6})^2/(\sqrt{1} + \sqrt{6})^2 = 0.18$.

28) **C**
Klassisk venderadius der $E_2 = V(r_2)$, dvs $-13.6\ \mathrm{eV}/4 = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r_2$, som løst mhp r_2 gir $r_2 = 4.2$ Å.

29) **C**
Her innser vi innledningsvis, fra figuren, at vi skal lokalisere den *største* verdien av r som gir $dP_{20}/dr = 0$, eller like gjerne $d\sqrt{P_{20}}/dr = 0$. Vi innfører $x = r/a_0$, dropper uinteressante konstanter og får uttrykket $(1 - x - x/2 + x^2/4)\exp(-x/2) = 0$, med løsningene $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Vi vet at her gjelder plusstegnet, og med $a_0 = 0.529$ Å har vi maksimal radialtetthet i avstand $r = 2.77$ Å.

30) **D**
Dreieimpulsbevarelse. Fotonet er en spinn-1-partikkel, slik at en overgang fra $2s$ til $1s$ i utgangspunktet er forbudt. ("Høyere ordens" prosesser gir likevel en endelig – men lang – levetid for $2s$-tilstanden i hydrogenatomet.)

31) **E**
$\partial E/\partial x = E_0(4x^3 - 4x)$ som er null i $x = 0$ og i $x = \pm 1$. Og selvsagt helt tilsvarende er $\partial E/\partial y = 0$ i $y = 0$ og ± 1. I alt $3 \times 3 = 9$ kombinasjoner som gir $\nabla E = 0$.

32) **C**
Det enkleste her er vel å sette inn og se: $E(0,0) = 2E_0$, $E(\pm 1, \pm 1) = 0$, $E(0, \pm 1) = E(\pm 1, 0) = E_0$. Følgelig er $E_{\min} = 0$, i de 4 punktene $(\pm 1, \pm 1)$.

33) **B**
"Minste motstands vei" fra et minimum til et annet er via en transisjonstilstand (sadelpunkt) i $(0, \pm 1)$ eller $(\pm 1, 0)$, der energien er E_0. Altså er aktiveringsenergien lik E_0.

34) **A**
Her trengs ikke mye regning: Siden $\partial^2 E/\partial x^2 = 12x^2 - 4$, er det klart at A er rett svar.

35) **B**
Normering av χ gir

$$1 = C^2\,(2-i, -2i-1)\begin{pmatrix} 2+i \\ 2i-1 \end{pmatrix} = C^2 \cdot (4+1+4+1) = 10C^2,$$

dvs $C = 1/\sqrt{10}$.

36) **A**

$$\hat{S}_y\chi = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 2+i \\ 2i-1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} C \begin{pmatrix} 2+i \\ 2i-1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\chi.$$

Med andre ord, χ er egenfunksjon til $\hat{S}_y$, med egenverdi $\hbar/2$.

37) **B**
Med skarp S_y er det klart at S_z er uskarp. Vi regner ut usikkerheten:

$$\begin{aligned}
\langle S_z \rangle &= C^2\frac{\hbar}{2}(2-i, -2i-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+i \\ 2i-1 \end{pmatrix} = C^2\frac{\hbar}{2}(2-i, -2i-1)\begin{pmatrix} 2+i \\ -2i+1 \end{pmatrix} = 0 \\
\langle S_z^2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \quad \text{(uten regning..)} \\
\Rightarrow \Delta S_z &= \sqrt{\hbar^2/4 - 0} = \hbar/2.
\end{aligned}$$

38) **D**

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_z, \hat{S}_x] &= \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \cdot 2i \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} \cdot 2i \cdot \hat{S}_y.
\end{aligned}$$

39) **D**
Ehrenfests teorem knytter kvantemekaniske forventningsverdier til Newtons lover.

40) **C**
Bølgefunksjoner inngikk ikke i Bohrs atommodell.