TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag til eksamen 12. mai 2020

For de fleste oppgavene var det seks varianter, med for eksempel ulike tallverdier. Hver student fikk en tilfeldig trukket variant på oppgaver med flere varianter. I dette løsningsforslaget presenteres svarene på samtlige varianter.

---

1. Med $\langle K_{\rm trans}\rangle = m\langle v^2\rangle/2 = 3k_BT/2$ og $\lambda = h/\langle p\rangle = h/m\sqrt{\langle v^2\rangle}$ har vi $\lambda = h/\sqrt{3mk_BT}$. Ved $T = 750$ K er tallverdien av den termiske de Broglie bølgelengden, i enheten pm (pikometer), gitt som $\lambda = 91.9/\sqrt{N}$, der N er antall kjernepartikler (nukleoner) i den aktuelle forbindelsen, hhv 514 for $C_{32}H_{18}N_8$, 4334 for Au_{22}, 1606 for $In_{11}P_{11}$, 832 for Cr_{16}, 341 for $C_{21}H_{27}NO_3$ og 245 for $C_{13}H_{15}N_3O_2$. Med verdiene $h = 2\pi\hbar = 2\pi\cdot 1.05\cdot 10^{-34}$ Js $k_B = 1.38\cdot 10^{-23}$ J/K og $1u = 1.66\cdot 10^{-27}$ kg gir dette hhv 4.1, 1.4, 2.3, 3.2, 5.0 og 5.9 pm.

2. Må ha fotoner med energi som er større enn metallets frigjøringsarbeid, dvs $hc/\lambda > W$, dvs $\lambda < hc/W$. Her er $hc = 1237$ eV nm. W er for Cs, Sn, Zr, K, Mg og Os hhv 1.95, 4.42, 4.05, 2.29, 3.66 og 5.93 eV, slik at minste λ som kan gi fotoelektrisk effekt er hhv 634, 280, 305, 540, 338 og 209 nm.

3. Intensiteten er strålingsenergien pr tids- og flateenhet (det ser vi av den oppgitte enheten W/m^2). Hvis hvert foton har energi E_γ, er intensiteten $j_\gamma = N_\gamma E_\gamma/tA$, der t er tiden og A er arealet. Antall fotoner som treffer 1 cm^2 i løpet av 1 sekund er da, med E_γ og j_γ hhv 64896, 19606, 2044, 11443, 1348, 3336 eV og 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 1.1 W/m^2, hhv $2.4\cdot 10^{10}$, $1.1\cdot 10^{11}$, $1.4\cdot 10^{12}$, $3.0\cdot 10^{11}$, $3.0\cdot 10^{12}$, $2.1\cdot 10^{11}$.

4. Fotoner med bølgelengde λ har impuls h/λ og energi $pc = hc/\lambda$. Med bølgelengde hhv 37 mm, 55 μm og 73 nm er impulsen hhv $1.8\cdot 10^{-32}$, $1.2\cdot 10^{-29}$ og $9.0\cdot 10^{-27}$ kg m/s og energien er hhv $5.3\cdot 10^{-24}$, $3.6\cdot 10^{-21}$ og $2.7\cdot 10^{-18}$ J.

5. $\lambda = h/p = h/mv$, som med molekylmasse *og* hastighet hhv 32, 46, 60, 74, 88 og 102 i enhetene u og m/s blir hhv 0.39 nm, 0.19 nm, 0.11 nm, 73 pm, 51 pm og 38 pm.

6. Vi har $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ og $K = E - mc^2$ for relativistiske partikler. Her er massene hhv 940, 106, 938, 80.4, 91.2 og 125 MeV/c^2 og impulsene er hhv 8.46, 0.742, 23.45, 0.2412, 0.456 og 1.125 GeV/c. Dette gir energier E lik hhv 8.5121, 0.7495, 23.4688, 0.2542, 0.4650 og 1.1319 GeV og kinetiske energier K lik hhv 7.57, 0.644, 22.5, 0.174, 0.374 og 1.01 GeV.

7. Baneradien i Bohrs atommodell skalerer kvadratisk med kvantetallet n og omvendt proporsjonalt med atomnummeret Z, dvs $r(n,Z) = a_0n^2/Z$, der $a_0 \simeq 52.9$ pm er Bohrradien. Med $Z = 4$ og $n = 1$ og 2 er r hhv 13.2 og 52.9 pm. Med $Z = 6$ og $n = 1$ og 2 er r hhv 8.8 og 35.3 pm. Med $Z = 8$ og $n = 1$ og 2 er r hhv 6.6 og 26.5 pm.

8. Elektronets banefart i Bohrs atommodell skalerer i utgangspunktet med kvadratroten av Z/r. Siden $r \sim n^2/Z$, er $v(n,Z) = v_0Z/n$, der $v_0 \simeq 2.19\cdot 10^6$ m/s er elektronets banefart i grunntilstanden i hydrogenatomet. Med $Z = 2$ og $n = 7$ er $v = 0.0021c$. Med $Z = 3$ og $n = 6$ er $v = 0.0037c$. Med $Z = 5$ og $n = 5$ er $v = 0.0073c$. Med $Z = 8$ og $n = 4$ er $v = 0.015c$. Med $Z = 12$ og $n = 3$ er $v = 0.029c$. Med $Z = 17$ og $n = 2$ er $v = 0.062c$.

9. Vi har $\lambda_{n1} = hc/\Delta E_{n1}$ med $\Delta E_{n1} = E_n - E_1 = \frac{(n^2-1)\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}$.
Med $n = 2$ og $L = 4.0$ nm: 18 μm. Med $n = 3$ og $L = 5.3$ nm: 12 μm. Med $n = 2$ og $L = 6.6$ nm: 48 μm. Med $n = 3$ og $L = 7.9$ nm: 26 μm. Med $n = 2$ og $L = 9.2$ nm: 94 μm. Med $n = 3$ og $L = 12.5$ nm: 65 μm.

10. Sannsynlighetstettheten blir på formen $|\Psi(x,t)|^2 = a(x) + b(x)\cos\omega t$ med $\omega = (E_j - E_k)/\hbar$ og dermed periode $T = 2\pi/\omega = h/|E_j - E_k|$. (Energier som i forrige oppgave.)
Med $j = 1$, $k = 2$ og $L = 2.5$ nm: 23 fs. Med $j = 2$, $k = 4$ og $L = 3.5$ nm: 11 fs. Med $j = 1$, $k = 3$ og $L = 4.5$ nm: 28 fs. Med $j = 4$, $k = 5$ og $L = 5.5$ nm: 37 fs. Med $j = 3$, $k = 6$ og $L = 6.5$ nm: 17 fs. Med $j = 4$, $k = 6$ og $L = 7.5$ nm: 31 fs.

11. Sannsynligheten for å måle elektronets posisjon mellom $x = 0$ og $x = \beta L$ (dvs i en andel β av brønnens utstrekning) er

$$P_1(0, \beta L) = \frac{2}{L}\int_0^{\beta L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$$

som med den oppgitte sammenhengen $\sin^2(\pi x/L) = (1 - \cos 2\pi x/L)/2$ blir $P_1 = \beta - (1/2\pi)\sin 2\pi\beta$.
Med $\beta = 1/4$: $P_1 = 0.1$. Med $\beta = 1/3$: $P_1 = 0.2$. Med $\beta = 2/5$: $P_1 = 0.3$. Med $\beta = 3/5$: $P_1 = 0.7$. Med $\beta = 2/3$: $P_1 = 0.8$. Med $\beta = 3/4$: $P_1 = 0.9$.

12. Vi har $P_3 = |c_3|^2 = 1 - |c_1|^2 - |c_2|^2$.
Med $c_1 = 2/3$ og $c_2 = 2/3$: $P_3 = 0.11$. Med $c_1 = 2/5$ og $c_2 = 4/5$: $P_3 = 0.20$. Med $c_1 = 2/3$ og $c_2 = 1/3$: $P_3 = 0.44$. Med $c_1 = 1/2$ og $c_2 = 3/7$: $P_3 = 0.57$. Med $c_1 = 2/5$ og $c_2 = 2/5$: $P_3 = 0.68$. Med $c_1 = 2/7$ og $c_2 = 2/7$: $P_3 = 0.84$.

13. Hver bundet tilstand i en enkelt brønn gir opphav til to bundne tilstander med omtrent samme energi i en dobbeltbrønn sålenge de to brønnene er adskilt av en relativt høy og tykk barriere. (Her er barrieren mellom brønnene ikke tykkere enn at vi i figuren kan lese av en tydelig forskjell mellom 10. og 11. eksiterte tilstand og mellom 12. og 13. eksiterte tilstand.) Fra figuren leser vi av energiegenverdiene ca 0.9 eV for 4. og 5. eksiterte tilstand, ca 1.6 eV for 6. og 7. eksiterte tilstand og ca 2.5 eV for 8. og 9. eksiterte tilstand.

14. Energiegentilstand $\psi(x)$ med N nullpunkter er N. eksiterte tilstand. Her er N hhv 4, 5, 6, 7, 8 eller 9.

15. Fra figuren kan vi anslå bølgelengden λ i barriereområdet mellom brønnene, og dermed partikkelens kinetiske energi $K = p^2/2m_e = h^2/2m_e\lambda^2$ i dette området. Total energi er da $E = K + V$ med $V = 5$ eV.
Med $\lambda = 0.8$ nm: $K = 2.3$ eV, $E = 7.3$ eV. Med $\lambda = 0.6$ nm: $K = 4.1$ eV, $E = 9.1 \simeq 9.2$ eV. Med $\lambda = 0.4$ nm: $K = 9.3$ eV, $E = 14.3 \simeq 14.6$ eV. Med $\lambda = 0.3$ nm: $K = 16.6$ eV, $E = 21.6 \simeq 21.4$ eV. Med $\lambda = 0.2$ nm: $K = 37.3$ eV, $E = 42.3 \simeq 42.5$ eV. Med $\lambda = 0.5/3 \simeq 0.167$ nm: $K = 53.7$ eV, $E = 58.7 \simeq 58.5$ eV.

16. Pauliprinsippet tillater inntil 2 elektroner i hver energiegentilstand, et med spinn opp og et med spinn ned. Med atomnummer hhv 5 og 7 har vi i dimerens grunntilstand to elektroner i hver av de hhv 5 og 7 laveste energiegentilstandene. Svaralternativene i oppgave 13 kan vel inspirere oss til å anslå energiegenverdier hhv 0.4, 0.9, 1.6, 2.5, 3.5 og 4.6 eV for hhv 2. og 3. 4. og 5. 6. og 7. 8. og 9. 10. og 11. og 12. og 13. eksiterte tilstand. Dessuten anslår vi fra figuren at grunntilstanden og 1. eksiterte tilstand har energiegenverdi ca 0.1 eV. Da blir regnskapet for B_2 og N_2 som følger:
B_2: $4 \cdot (0.1 + 0.4)$ eV $+ 2 \cdot 0.9$ eV $= 3.8$ eV.
N_2: $4 \cdot (0.1 + 0.4 + 0.9)$ eV $+ 2 \cdot 1.6$ eV $= 8.8$ eV.

17. Som i oppgave 14: Energiegentilstand $\psi(x)$ med N nullpunkter er N. eksiterte tilstand. Her er N hhv 3, 4, 5, 6, 7, eller 8.

18. "Omhylningskurven" $\sin kz$ (dersom $\psi(0) = 0$) eller $\cos kz$ (dersom $\psi(0) \neq 0$) har på intervallet -5 nm $< z < 5$ nm hhv 1, 2 og 3 hele bølgelengder $\lambda = 2\pi/k$. Følgelig er de tilhørende verdiene for $k = 2\pi/\lambda$ hhv 0.63, 1.26 og 1.88 nm^{-1}.

19. For $k = 10$ nm^{-1} er, fra figuren og den heltrukne kurven, $E \simeq -16.00$ eV. Med $E(0) = -17.649$ eV har vi altså at $\hbar^2 k^2/2m^* \simeq 1.649$ eV når $k = 10$ nm^{-1}. Dermed er den effektive massen

$$m^* = (1.05 \cdot 10^{-34})^2 \cdot (10 \cdot 10^9)^2/(2 \cdot 1.649 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}) \text{ kg} \simeq 2.09 \cdot 10^{-30} \text{ kg}.$$

Dvs $m^* \simeq 2.3 m_e$.

20. For enkel harmonisk oscillator med redusert masse μ og vibrasjonsfrekvens ν er fjærkonstanten $k = \mu\omega^2 = 4\pi^2\mu\nu^2$. Her er ν hhv 6.30, 7.77, 9.00, 12.24, 14.43 og 16.11 THz og μ er hhv 53.21u, 97.54u, 27.92u, 23.93u, 26.00u og 25.47u. Dette gir k hhv 138, 386, 148, 235, 355 og 433 N/m.

21. $N_1/N_0 = \exp[(E_0 - E_1)/k_B T] = \exp[-h\nu/k_B T]$. Her er ν hhv 6.30, 7.77, 9.00, 12.24, 14.43 og 16.11 THz, som gir N_1/N_0 hhv 0.37, 0.29, 0.24, 0.14, 0.10 og 0.077.

22. $N_1/N_0 = \exp[(K_0 - K_1)/k_B T] = \exp[-\hbar^2/I_0 k_B T] = 1/10$. Den temperaturen som gir dette forholdet mellom N_1 og N_0 er gitt ved $T = \hbar^2/I_0 k_B \ln 10$. Her er $I_0 = \mu d^2$, der μ er dimerens reduserte masse og d er bindingslengden. Her har vi disse tallverdiene:
For d hhv 248, 233, 199, 194, 168 og 177 pm.
For μ hhv 53.21u, 97.54u, 27.92u, 23.93u, 26.00u og 25.47u.
Dette gir T hhv 64, 39, 189, 232, 285 og 262 mK.

23. De mulige verdiene for n_x er $0, 1, \ldots, N$, i alt $N+1$ muligheter for energinivået $E_N = (n_x + 1/2 + n_y + 1/2)\hbar\omega = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega = (N+1)\hbar\omega$. For gitt n_x er det bare en mulig verdi for n_y, nemlig $n_y = N - n_x$. Dermed romlig degenerasjonsgrad $N + 1$ for energinivået $(N+1)\hbar\omega$.

24. Med ψ_{00} er vinkelfunksjonen $\Phi(\phi)$ en konstant. Da er $L = L_z = 0$.
$\psi_{01} \sim y \sim \sin\phi \sim \exp(i\phi) - \exp(-i\phi)$, dvs en lineærkombinasjon av vinkelfunksjoner $\Phi_{\pm 1}(\phi)$. Da er L_z enten $\hbar$ eller $-\hbar$, dvs en måling av L_z vil gi verdien $\hbar$ eller $-\hbar$ (med like stor sannsynlighet). Da er $|L| = |L_z| = \hbar$.
$\psi_{10} \sim x \sim \cos\phi \sim \exp(i\phi) + \exp(-i\phi)$, dvs en lineærkombinasjon av vinkelfunksjoner $\Phi_{\pm 1}(\phi)$. Da er L_z enten $\hbar$ eller $-\hbar$, dvs en måling av L_z vil gi verdien $\hbar$ eller $-\hbar$ (med like stor sannsynlighet). Da er $|L| = |L_z| = \hbar$.

25. Med ψ_{00} er vinkelfunksjonen $\Phi(\phi)$ en konstant. Da er $L = L_z = 0$.
$\psi_{01} \sim y \sim \sin\phi \sim \exp(i\phi) - \exp(-i\phi)$, dvs en lineærkombinasjon av vinkelfunksjoner $\Phi_{\pm 1}(\phi)$. Da er L_z enten $\hbar$ eller $-\hbar$, dvs en måling av L_z vil gi verdien $\hbar$ eller $-\hbar$ (med like stor sannsynlighet). Da er L_z uskarp.
$\psi_{10} \sim x \sim \cos\phi \sim \exp(i\phi) + \exp(-i\phi)$, dvs en lineærkombinasjon av vinkelfunksjoner $\Phi_{\pm 1}(\phi)$. Da er L_z enten $\hbar$ eller $-\hbar$, dvs en måling av L_z vil gi verdien $\hbar$ eller $-\hbar$ (med like stor sannsynlighet). Da er L_z uskarp.

26. Med ψ_{00} er vinkelfunksjonen $\Phi(\phi)$ en konstant. Da er $L = L_z = 0$ og $\langle L_z \rangle = 0$.
$\psi_{01} \sim y \sim \sin\phi \sim \exp(i\phi) - \exp(-i\phi)$, dvs en lineærkombinasjon av vinkelfunksjoner $\Phi_{\pm 1}(\phi)$. Da er L_z enten $\hbar$ eller $-\hbar$, dvs en måling av L_z vil gi verdien $\hbar$ eller $-\hbar$, med like stor sannsynlighet. Da er $\langle L_z \rangle = 0$.
$\psi_{10} \sim x \sim \cos\phi \sim \exp(i\phi) + \exp(-i\phi)$, dvs en lineærkombinasjon av vinkelfunksjoner $\Phi_{\pm 1}(\phi)$. Da er L_z enten $\hbar$ eller $-\hbar$, dvs en måling av L_z vil gi verdien $\hbar$ eller $-\hbar$, med like stor sannsynlighet. Da er $\langle L_z \rangle = 0$.

27. En egenfunksjon til $\hat{L}_z$ med egenverdi $+\hbar$ er (proporsjonal med) $\exp(i\phi)$. Siden $\psi_{10} \sim \cos\phi$ og $\psi_{01} \sim \sin\phi$, vil lineærkombinasjonen $\psi_{10} + i\psi_{01}$ bli proporsjonal med nettopp $\exp(i\phi)$.
En egenfunksjon til $\hat{L}_z$ med egenverdi $-\hbar$ er (proporsjonal med) $\exp(-i\phi)$. Siden $\psi_{10} \sim \cos\phi$ og $\psi_{01} \sim \sin\phi$, vil lineærkombinasjonen $\psi_{10} - i\psi_{01}$ bli proporsjonal med nettopp $\exp(-i\phi)$.

28. Når $E = V_0$, forenkler de to oppgitte uttrykkene for T seg til

$$T = [1 + (k_0 L/2)^2]^{-1} = [1 + 2m^* V_0 L^2 / 4\hbar^2]^{-1}.$$

Med $V_0 = 380$ meV, $L = 3.25$ nm, $m^* = 0.067 m_e$: $T = 0.36$.
Med $V_0 = 350$ meV, $L = 3.50$ nm, $m^* = 0.074 m_e$: $T = 0.32$.
Med $V_0 = 320$ meV, $L = 4.00$ nm, $m^* = 0.079 m_e$: $T = 0.27$.
Med $V_0 = 290$ meV, $L = 4.50$ nm, $m^* = 0.087 m_e$: $T = 0.23$.
Med $V_0 = 260$ meV, $L = 5.00$ nm, $m^* = 0.107 m_e$: $T = 0.18$.
Med $V_0 = 230$ meV, $L = 6.50$ nm, $m^* = 0.117 m_e$: $T = 0.12$.

29. $T = 1$ hvis $\sin(k_0 L \sqrt{E/V_0 - 1}) = 0$, dvs hvis $k_0 L \sqrt{E/V_0 - 1} = n\pi$, dvs hvis $E = V_0 + n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2m^* L^2$.
Med $V_0 = 380$ meV, $L = 3.25$ nm, $m^* = 0.067 m_e$: $E = 907$ meV.
Med $V_0 = 350$ meV, $L = 3.50$ nm, $m^* = 0.074 m_e$: $E = 762$ meV.
Med $V_0 = 320$ meV, $L = 4.00$ nm, $m^* = 0.079 m_e$: $E = 615$ meV.
Med $V_0 = 290$ meV, $L = 4.50$ nm, $m^* = 0.087 m_e$: $E = 502$ meV.
Med $V_0 = 260$ meV, $L = 5.00$ nm, $m^* = 0.107 m_e$: $E = 400$ meV.
Med $V_0 = 230$ meV, $L = 6.50$ nm, $m^* = 0.117 m_e$: $E = 306$ meV.

30. Transmisjonssannsynligheten for δ-funksjonsbarriere $V(x) = \beta\delta(x)$ er $T(E) = (1 + m^* \beta^2 / 2E\hbar^2)^{-1}$.
Med $\beta = 3.0$ eV nm, $E = 8.0$ eV, $m^* = 0.067 m_e$: $T = 0.67$.
Med $\beta = 4.0$ eV nm, $E = 7.5$ eV, $m^* = 0.074 m_e$: $T = 0.49$.
Med $\beta = 5.0$ eV nm, $E = 7.0$ eV, $m^* = 0.079 m_e$: $T = 0.35$.
Med $\beta = 6.0$ eV nm, $E = 6.5$ eV, $m^* = 0.087 m_e$: $T = 0.24$.
Med $\beta = 7.0$ eV nm, $E = 6.0$ eV, $m^* = 0.107 m_e$: $T = 0.15$.
Med $\beta = 8.0$ eV nm, $E = 5.5$ eV, $m^* = 0.117 m_e$: $T = 0.10$.

31. For et elektron i tilstanden ψ_{nlm} er $L = |\boldsymbol{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ og $L_z = m\hbar$. Det betyr at vinkelen mellom z-aksen og $\boldsymbol{L}$ er $\theta = \arccos(L_z/L) = \arccos(m/\sqrt{l(l+1)})$.
For ψ_{433}: $\theta = \arccos(3/\sqrt{12}) = 30°$.
For ψ_{432}: $\theta = \arccos(2/\sqrt{12}) = 55°$.
For ψ_{431}: $\theta = \arccos(1/\sqrt{12}) = 73°$.
For ψ_{322}: $\theta = \arccos(2/\sqrt{6}) = 35°$.
For ψ_{321}: $\theta = \arccos(1/\sqrt{6}) = 66°$.
For ψ_{211}: $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = 45°$.

32. Radialfunksjonen for nl-tilstander med $l = n - 1$ er på formen

$$R_{n,n-1} \sim r^{n-1} \exp(-r/na_0),$$

slik at $u = rR$ er på formen

$$u_{n,n-1} = rR_{n,n-1} \sim r^n \exp(-r/na_0).$$

Om vi her maksimerer R^2 og $(rR)^2$ eller R og rR spiller selvsagt ingen rolle, så vi velger like gjerne de sistnevnte. Vi setter de deriverte lik null, hhv $dR/dr = 0$ og $du/dr = 0$, og finner at $R^2_{n,n-1}$ har maksverdi for $r = n(n-1)a_0$ mens $u^2_{n,n-1}$ har maksverdi for $r = n^2 a_0$.
$4f$-tilstander: Maksimal u^2_{43} for $r = 16a_0$, maksimal R^2_{43} for $r = 12a_0$.
$3d$-tilstander: Maksimal u^2_{32} for $r = 9a_0$, maksimal R^2_{32} for $r = 6a_0$.
$2p$-tilstander: Maksimal u^2_{21} for $r = 4a_0$, maksimal R^2_{21} for $r = 2a_0$.

33. $\psi_{200} + (\psi_{21-1} - \psi_{211})/\sqrt{2}$ er summen av orbitalene $2s$ og $2p_x$, med kulesymmetrisk $2s$ (paritet +1) og $2p_x$ rotasjonssymmetrisk om x-aksen men antisymmetrisk mhp origo (paritet -1). Tyngdepunktet $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ ligger da på x-aksen.
$\psi_{200} + i(\psi_{21-1} + \psi_{211})/\sqrt{2}$ er summen av orbitalene $2s$ og $2p_y$, med kulesymmetrisk $2s$ (paritet +1) og $2p_y$ rotasjonssymmetrisk om y-aksen men antisymmetrisk mhp origo (paritet -1). Tyngdepunktet $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ ligger da på y-aksen.
$\psi_{200} + \psi_{210}$ er summen av orbitalene $2s$ og $2p_z$, med kulesymmetrisk $2s$ (paritet +1) og $2p_z$ rotasjonssymmetrisk om z-aksen men antisymmetrisk mhp origo (paritet -1). Tyngdepunktet $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ ligger da på z-aksen.
$\psi_{200} + [(i+1)\psi_{21-1} + (i-1)\psi_{211})/\sqrt{2}$ er summen av orbitalene $2s$, $2p_x$ og $2p_y$, med kulesymmetrisk $2s$ (paritet +1) og $2p_x$ og $2p_y$ rotasjonssymmetriske om hhv x- og y-aksen men antisymmetriske mhp origo (paritet -1). Tyngdepunktet $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ ligger da på linjen $x = y$ i xy-planet.
$\psi_{200} + (\psi_{21-1} - \psi_{211})/\sqrt{2} + \psi_{210}$ er summen av orbitalene $2s$, $2p_x$ og $2p_z$, med kulesymmetrisk $2s$ (paritet +1) og $2p_x$ og $2p_z$ rotasjonssymmetriske om hhv x- og z-aksen men antisymmetriske mhp origo (paritet -1). Tyngdepunktet $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ ligger da på linjen $x = z$ i xz-planet.
$\psi_{200} + i(\psi_{21-1} + \psi_{211})/\sqrt{2} + \psi_{210}$ er summen av orbitalene $2s$, $2p_y$ og $2p_z$, med kulesymmetrisk $2s$ (paritet +1) og $2p_y$ og $2p_z$ rotasjonssymmetriske om hhv y- og z-aksen men antisymmetriske mhp origo (paritet -1). Tyngdepunktet $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ ligger da på linjen $y = z$ i yz-planet.

34.

$$Y_{20} \sim 3\cos^2\theta - 1 = 3z^2/r^2 - (x^2+y^2+z^2)/r^2 = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}$$

$$Y_{21} \sim \sin\theta\cos\theta(\cos\phi + i\sin\phi) = \frac{z(x+iy)}{r^2}$$

$$Y_{22} \sim \sin^2\theta(\cos 2\phi + i\sin 2\phi) = \frac{(x+iy)^2}{r^2}$$

Den siste likheten følger av at

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^2 = \cos^2\phi - \sin^2\phi + 2i\sin\phi\cos\phi = \cos 2\phi + i\sin 2\phi.$$

35. $\lambda = hc/(E_i - E_f)$ med $E = -13.6\,\mathrm{eV}/n^2$.
$4 \to 2$: 486 nm
$7 \to 3$: 1005 nm
$5 \to 3$: 1282 nm
$4 \to 3$: 1875 nm
$7 \to 4$: 2166 nm
$5 \to 4$: 4051 nm

36. Normering av en spinntilstand

$$\chi = A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

innebærer at

$$1 = \chi^\dagger\chi = |A|^2\ (a^*\ b^*)\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |A|^2\,(|a|^2 + |b|^2).$$

Dermed, når A velges positiv og reell: $A = 1/\sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.
Med $a = 3$ og $b = 5i - 2$: $A = 1/\sqrt{9 + 25 + 4} = 1/\sqrt{38}$. Og vi innser at sålenge realdel og imaginærdel av a og b er permutasjoner av tallene 5, 3, 2 og 0, blir alltid $|a|^2 + |b|^2 = 25 + 9 + 4 + 0 = 38$ og $A = 1/\sqrt{38}$.

37. Med utgangspunkt i spinntilstanden

$$\chi = A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

og de ulike spinnoperatorene kan vi finne forventningsverdier og standardavvik for de ulike spinnkomponentene:

$$\begin{aligned}
\langle S_x \rangle &= |A|^2\hbar\mathrm{Re}(a^*b) \\
\langle S_y \rangle &= |A|^2\hbar\mathrm{Im}(a^*b) \\
\langle S_z \rangle &= |A|^2\frac{\hbar}{2}(|a|^2 - |b|^2) \\
\Delta S_x &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 - (2|A|^2\mathrm{Re}(a^*b))^2} \\
\Delta S_y &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 - (2|A|^2\mathrm{Im}(a^*b))^2} \\
\Delta S_z &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 - (|A|^2(|a|^2 - |b|^2))^2}
\end{aligned}$$

Dermed:

$$A = 1/\sqrt{30}\ ,\ a = 1 + 2i\ ,\ b = 3 + 4i \quad \Rightarrow \quad \langle S_x \rangle = 11\hbar/30\ ,\ \langle S_y \rangle = -\hbar/15\ ,\ \langle S_z \rangle = -\hbar/3$$
$$A = 1/\sqrt{30}\ ,\ a = 3i - 2\ ,\ b = 1 - 4i \quad \Rightarrow \quad \langle S_x \rangle = -7\hbar/15\ ,\ \langle S_y \rangle = \hbar/6\ ,\ \langle S_z \rangle = -\hbar/15$$

38.

$$A = 1/\sqrt{3}\ ,\ a = i\ ,\ b = 1 - i \quad \Rightarrow \quad \Delta S_x = \sqrt{5}\hbar/6\ ,\ \Delta S_y = \sqrt{5}\hbar/6\ ,\ \Delta S_z = \sqrt{2}\hbar/3$$
$$A = 1/\sqrt{3}\ ,\ a = i + 1\ ,\ b = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_x = \sqrt{5}\hbar/6\ ,\ \Delta S_y = \sqrt{5}\hbar/6\ ,\ \Delta S_z = \sqrt{2}\hbar/3$$

39. $[\hat{L}_x, z]f(x,y,z) = (\hbar/i)(y\partial_z - z\partial_y)zf - (\hbar/i)z(y\partial_z - z\partial_y)f = (\hbar/i)yf = (-i\hbar y)f$. Her er $\partial_y \equiv \partial/\partial y$ og tilsvarende for ∂_z.

40. $[\hat{p}_x, \hat{L}_y]f(x,y,z) = (\hbar/i)^2\partial_x(z\partial_x - x\partial_z)f - (\hbar/i)^2(z\partial_x - x\partial_z)\partial_x f = -(\hbar/i)^2\partial_z f = (i\hbar\hat{p}_z)f$.