For de 14 første oppgavene var det seks varianter, med for eksempel ulike tallverdier. Hver student fikk en tilfeldig trukket variant på oppgaver med flere varianter. I dette løsningsforslaget presenteres svarene på samtlige varianter.

---

1. Med $\langle K_{\text{trans}}\rangle = m\langle v^2\rangle/2 = 3k_BT/2$ og $\lambda = h/\langle p\rangle = h/m\sqrt{\langle v^2\rangle}$ har vi $\lambda = h/\sqrt{3mk_BT}$. Ved $T = 300$ K er tallverdien av den termiske de Broglie bølgelengden, i enheten pm (pikometer), gitt som $\lambda = 91.9/\sqrt{N}$, der N er antall kjernepartikler (nukleoner) i den aktuelle forbindelsen, hhv 16, 30, 44, 58, 72 og 86 for C_nH_{2n+2} med n fra 1 til 6. Med verdiene $h = 2\pi\hbar = 2\pi\cdot 1.05\cdot 10^{-34}$ Js $k_B = 1.38\cdot 10^{-23}$ J/K og $1u = 1.66\cdot 10^{-27}$ kg gir dette hhv 36.3, 26.5, 21.9, 19.1, 17.1 og 15.7 pm.

2. Må ha fotoner med energi som er større enn metallets frigjøringsarbeid, dvs $hc/\lambda > W$, dvs $\lambda < hc/W$. Her er $hc = 1237$ eV nm. W er for Rb, Sm, Nd, As, Mn og Re hhv 2.26, 2.70, 3.20, 3.75, 4.10 og 4.72 eV, slik at minste λ som kan gi fotoelektrisk effekt er hhv 547, 458, 387, 330, 302 og 262 nm.

3. Intensiteten er strålingsenergien pr tids- og flateenhet (det ser vi av den oppgitte enheten W/m^2). Hvis hvert foton har energi E_γ, er intensiteten $j_\gamma = N_\gamma E_\gamma/tA$, der t er tiden og A er arealet. Antall fotoner som treffer 1 cm^2 i løpet av 1 sekund er her hhv $6.6\cdot 10^{11}$, $5.5\cdot 10^{11}$, $4.4\cdot 10^{11}$, $3.3\cdot 10^{11}$, $2.2\cdot 10^{11}$, $1.1\cdot 10^{11}$. Fotonenes bølgelengder er hhv 20.9, 51.2, 55.9, 70.9, 134 og 154 pm. Fotonenergien er $E_\gamma = hc/\lambda$. Med $t = 1$ sekund og $A = 10^{-4}$ m^2 blir intensitetene hhv 62.5, 21.3, 15.6, 9.2, 3.2, 1.4 W/m^2.

4. Fotoner med bølgelengde λ har impuls h/λ. Dersom $h/\lambda = 1.993\cdot 10^{-24}$ kg m/s (med λ og h angitt i SI-enheter), har fotonet en impuls lik 1 atomær enhet. Følgelig må vi dividere impulsens tallverdi i SI-enheter med tallet $1.993\cdot 10^{-24}$ for å finne impulsens tallverdi i atomære enheter. Med bølgelengde hhv 400, 450, 500, 550, 600, 650 nm er impulsen hhv $8.3\cdot 10^{-4}$, $7.4\cdot 10^{-4}$, $6.6\cdot 10^{-4}$, $6.0\cdot 10^{-4}$, $5.5\cdot 10^{-4}$, $5.1\cdot 10^{-4}$ atomære enheter.

5. $\lambda = h/p = h/mv$, som med molekylmasse *og* hastighet hhv 16, 30, 44, 58, 72 og 86 i enhetene u og m/s blir hhv 1.6 nm, 0.44 nm, 0.21 nm, 0.12 nm, 77 pm og 54 pm.

6. Vi har $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ og $E = K + mc^2$ for relativistiske partikler. Da blir $pc = \sqrt{(K+mc^2)^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{K^2 + 2Kmc^2}$. Her er kinetisk energi Nmc^2 med N lik hhv 1, 2, 3, 4, 5 og 6, slik at $pc = mc^2\sqrt{N^2+2N} = mc^2\sqrt{N(N+2)}$. Med masser hhv 940, 106, 938, 80.4, 91.2 og 125 MeV/c^2 blir impulsene hhv 1.63, 0.300, 3.63, 0.394, 0.540 og 0.866 GeV/c.

7. Baneradien i Bohrs atommodell skalerer kvadratisk med kvantetallet n og omvendt proporsjonalt med atomnummeret Z, dvs $r(n,Z) = a_0n^2/Z$, der $a_0 \simeq 52.9$ pm er Bohrradien. Med atomære enheter setter vi ganske enkelt $a_0 = 1$, slik at $r_{\text{a.u.}} = n^2/Z$.
Med $Z = 4$ og $n = 2$: $r_{\text{a.u.}} = 1$. Med $Z = 4$ og $n = 3$: $r_{\text{a.u.}} = 9/4 = 2.25$.
Med $Z = 6$ og $n = 2$: $r_{\text{a.u.}} = 4/6 = 0.67$. Med $Z = 6$ og $n = 3$: $r_{\text{a.u.}} = 9/6 = 1.5$.
Med $Z = 8$ og $n = 2$: $r_{\text{a.u.}} = 4/8 = 0.5$. Med $Z = 8$ og $n = 3$: $r_{\text{a.u.}} = 9/8 = 1.125 \simeq 1.13$.

8. Elektronets banefart i Bohrs atommodell skalerer i utgangspunktet med kvadratroten av Z/r. Siden $r \sim n^2/Z$, er $v(n,Z) = v_0Z/n$. Her er, i atomære enheter, $v_0 = 1$ elektronets banefart i grunntilstanden i hydrogenatomet. Dermed:
Med $Z = 5$ og $n = 3$: $v = 1.67$. Med $Z = 6$ og $n = 3$: $v = 2$. Med $Z = 7$ og $n = 3$: $v = 2.33$.
Med $Z = 8$ og $n = 2$: $v = 4$. Med $Z = 9$ og $n = 2$: $v = 4.5$. Med $Z = 10$ og $n = 2$: $v = 5$.

9. Vi har $\lambda_{31} = hc/\Delta E_{31}$ med $\Delta E_{31} = E_3 - E_1 = \frac{(3^2-1^2)\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}$. Med L hhv 2.0, 3.0, 4.0, 7.0, 8.0 og 9.0 nm blir det utsendte fotonets bølgelengde hhv ca 1.7, 3.7, 6.6, 20, 27 og 34 μm.

10. Sannsynlighetstettheten blir på formen $|\Psi(x,t)|^2 = a(x) + b(x)\cos\omega t$ med $\omega = (E_3 - E_2)/\hbar$ og dermed frekvens $f = \omega/2\pi = (E_3 - E_2)/h$. (Energier som i forrige oppgave.) Her er brønnbredden hhv 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0 og 9.0 nm. Dette gir, i enheten THz, frekvensene 28.3, 18.1, 12.6, 9.2, 7.1 og 5.6.

11. Sannsynligheten for å måle elektronets posisjon mellom $x = 0$ og $x = \beta L$ (dvs i en andel β av brønnens utstrekning) er

$$P_N(0,\beta L) = \frac{2}{L}\int_0^{\beta L} \sin^2 \frac{N\pi x}{L} dx$$

som med den oppgitte sammenhengen $\sin^2(N\pi x/L) = (1 - \cos 2N\pi x/L)/2$ blir $P_N = \beta - (1/2N\pi)\sin 2N\pi\beta$.
Med $N = 3$ og $\beta = 2/5$: $P_3 = 0.3495$.
Med $N = 3$ og $\beta = 3/5$: $P_3 = 0.6505$.
Med $N = 3$ og $\beta = 4/5$: $P_3 = 0.7688$.
Med $N = 5$ og $\beta = 4/7$: $P_5 = 0.5963$.
Med $N = 5$ og $\beta = 5/7$: $P_5 = 0.7281$.
Med $N = 5$ og $\beta = 6/7$: $P_5 = 0.8261$.

12. Vi har $P_7 = |c_7|^2 = 1 - |c_1|^2 - |c_3|^2 - |c_5|^2$.
Med $c_1 = c_3 = c_5 = 1/3$: $P_7 = 0.6667$.
Med $c_1 = c_3 = c_5 = 1/4$: $P_7 = 0.8125$.
Med $c_1 = c_3 = c_5 = 1/5$: $P_7 = 0.8800$.
Med $c_1 = c_3 = c_5 = 1/6$: $P_7 = 0.9167$.
Med $c_1 = c_3 = c_5 = 1/7$: $P_7 = 0.9388$.
Med $c_1 = c_3 = c_5 = 1/8$: $P_7 = 0.9531$.

13. Figuren og de oppgitte alternativene gir bunnsolid grunnlag for å konkludere med at 1., 3., 5., 7., 9. og 11. eksiterte tilstand har energiegenverdier hhv -4.60, -3.41, -2.41, -1.67, -1.05 og -0.29 eV.

14. Energiegentilstand $\psi(x)$ med N nullpunkter er N. eksiterte tilstand. Her er N hhv 1, 3, 5, 7, 9 eller 11, og tilhørende energiegenverdier er hhv -4.60, -3.41, -2.41, -1.67, -1.05 og -0.29 eV.

15. Fra figuren kan vi anslå bølgelengden λ i barriereområdet mellom brønnene er ca 1/3 av 0.50 nm. Siden $V = 0$ i dette området, har vi $E = K = p^2/2m_e = h^2/2m_e\lambda^2$, som med tallverdier innsatt blir ca 8.6 aJ (attojoule) eller ca 54 eV.

16. Pauliprinsippet tillater inntil 2 elektroner i hver energiegentilstand, et med spinn opp og et med spinn ned. Med atomnummer hhv 1 og 9 har vi i molekylets grunntilstand to elektroner i hver av de 5 laveste energiegentilstandene. Fra figuren anslår vi -4.9 eV, -4.1 eV og -2.5 eV for hhv laveste, 2. eksiterte og 4. eksiterte tilstand. Fra oppgave 13 har vi -4.6 eV og -3.4 eV for hhv 1. og 3. eksiterte tilstand. To elektroner i hver av disse gir total energi ca -39 eV.

17. Som i oppgave 14: Energiegentilstand $\psi(x)$ med N nullpunkter er N. eksiterte tilstand. Her er $N = 2$, dermed 2. eksiterte tilstand.

18. "Omhylningskurven" $\cos kz$ (siden ψ er maksimal ved $z = 0$) har på intervallet -3.14 nm $< z <$ 3.14 nm 1/2 bølgelengde $\lambda = 2\pi/k$. Følgelig er $k = 2\pi/\lambda \simeq 2\pi/4\pi$ nm^{-1} = 0.5 nm^{-1}.

19. For $k = 6$ nm^{-1} er, fra figuren og den heltrukne kurven, $E \simeq -17.50$ eV. Med $E(0) = -18.036$ eV har vi altså at $\hbar^2 k^2/2m^* \simeq 0.536$ eV når $k = 6$ nm^{-1}. Dermed er den effektive massen

$$m^* = (1.05 \cdot 10^{-34})^2 \cdot (6 \cdot 10^9)^2/(2 \cdot 0.536 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}) \text{ kg} \simeq 2.31 \cdot 10^{-30} \text{ kg}.$$

Dvs $m^* \simeq 2.54 m_e$ med dette estimatet. Vi innser at den heltrukne kurven passerer litt under -17.50 eV ved $k = 6$, slik at den effektive massen er litt større enn dette estimatet. Vi konkluderer med 2.68.

20. For enkel harmonisk oscillator med masse m og vibrasjonsfrekvens ν er fjærkonstanten $k = m\omega^2 = 4\pi^2 m\nu^2$. Her er $\nu = 38.76$ THz og m er 16u. Det gir $k = 1575$ N/m.

21. $N_1/N_0 = \exp[(E_0 - E_1)/k_B T] = \exp[-h\nu/k_B T]$. Her er $\nu = 38.76$ THz og $T = 250$ K. Det gir $N_1/N_0 = 0.00060$.

22. $N_1/N_0 = \exp[(K_0 - K_1)/k_B T] = \exp[-\hbar^2/I_0 k_B T] = 1/2$. Den temperaturen som gir dette forholdet mellom N_1 og N_0 er gitt ved $T = \hbar^2/I_0 k_B \ln 2$. Her er $I_0 = 2m_{\text{O}} d^2$, der d er C-O bindingslengden. Med $m_{\text{O}} = 16u$ og $d = 117.7$ pm blir T ca 1.57 K.

23. Her er de tillatte energinivåene

$$E_{n_x,n_y,n_z} = ((n_x + 1/2) + 2(n_y + 1/2) + 3(n_z + 1/2))\hbar\omega = (n_x + 2n_y + 3n_z + 3)\hbar\omega.$$

De mulige kombinasjonene som gir $n_x + 2n_y + 3n_z = 4$ er $(n_x, n_y, n_z) = (4,0,0), (2,1,0), (1,0,1), (0,2,0)$. Dermed romlig degenerasjonsgrad 4 for energinivået $7\hbar\omega$.

24. $E_{123} = (1 + 4 + 9 + 3)\hbar\omega = 17\hbar\omega$.

25. Pariteten til de tre endimensjonale $\psi_{n_x}(x)$, $\psi_{n_y}(y)$ og $\psi_{n_z}(z)$ er hhv $(-1)^{n_x}$, $(-1)^{n_y}$ og $(-1)^{n_z}$, slik at produktet $\psi_{n_x n_y n_z}$ av disse tre har paritet $(-1)^{n_x+n_y+n_z}$.

26. Det følger direkte fra TUSL med $V(x) = V_0$ at $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$.

27. Det følger direkte fra TUSL med $V(x) = 0$ at $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

28. Innsetting av tallverdier i det øverste uttrykket for T gir verdien 0.037.

29. $T = 1$ hvis $\sin(k_0 L\sqrt{E/V_0 - 1}) = 0$, dvs hvis $k_0 L\sqrt{E/V_0 - 1} = n\pi$, dvs hvis $E = V_0 + n^2\pi^2\hbar^2/2m^* L^2$. Med $n = 1$, $V_0 = 250$ meV, $L = 3.20$ nm, $m^* = 0.33 m_e$: $E = 360$ meV.

30. Transmisjonssannsynligheten for δ-funksjonsbarriere $V(x) = \beta\delta(x)$ er $T(E) = (1 + m^*\beta^2/2E\hbar^2)^{-1}$. Med $\beta = 3.3$ eV nm, $E = 3.3$ eV, $m^* = 0.33 m_e$: $T = 0.12$.

31. For et elektron i tilstanden ψ_{nlm} er $L = |\boldsymbol{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ og $L_z = m\hbar$. Det betyr at vinkelen mellom z-aksen og $\boldsymbol{L}$ er $\theta = \arccos(L_z/L) = \arccos(m/\sqrt{l(l+1)})$.
For ψ_{651}: $\theta = \arccos(1/\sqrt{30}) = 79°$. Følgelig er vinkelen mellom xy-planet og $\boldsymbol{L}$ 11°.

32. Radialfunksjonen for nl-tilstander med $l = n - 1$ er på formen

$$R_{n,n-1} \sim r^{n-1} \exp(-r/na_0),$$

slik at $u = rR$ er på formen

$$u_{n,n-1} = rR_{n,n-1} \sim r^n \exp(-r/na_0).$$

Om vi her maksimerer $(rR)^2$ eller rR spiller selvsagt ingen rolle, så vi velger like gjerne den sistnevnte. Vi setter den deriverte lik null, dvs $du/dr = 0$, og finner at $u^2_{n,n-1}$ har maksverdi for $r = n^2 a_0$.
$6h$-tilstander: Maksimal u^2_{65} for $r = 36a_0$.

33. Dette er en sum av tre ortogonale s-tilstander, alle med tyngdepunkt i origo. Da har også summen sitt tyngdepunkt i origo.

34.

$$Y_{30} \sim 5\cos^3\theta - 3\cos\theta = 5z^3/r^3 - 3z/r = \frac{z(5z^2 - 3r^2)}{r^3}$$

35. $\lambda = hc/(E_i - E_f)$ med $E = -13.6\,\mathrm{eV}/n^2$. $6 \to 5$: 7442 nm

36. Normering av en spinntilstand

$$\chi = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

innebærer at

$$1 = \chi^\dagger \chi = |A|^2 \; (a^* \; b^*) \; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |A|^2 \,(|a|^2 + |b|^2).$$

Dermed, når A velges positiv og reell: $A = 1/\sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.
Med $a = 3i + 3$ og $b = 5i + 5$: $A = 1/\sqrt{9 + 9 + 25 + 25} = 1/\sqrt{68}$.

37. Med utgangspunkt i spinntilstanden

$$\chi = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

og de ulike spinnoperatorene kan vi finne forventningsverdier og standardavvik for de ulike spinnkomponentene. Her og i neste oppgave trenger vi:

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= |A|^2 \frac{\hbar}{2}(|a|^2 - |b|^2) \\ \Delta S_x &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 - (2|A|^2 \mathrm{Re}(a^* b))^2} \end{aligned}$$

Dermed:

$$A = 1/\sqrt{30}\ ,\ a = 2i\ ,\ b = 1 - 5i \quad \Rightarrow \quad \langle S_z \rangle = (1/30)(\hbar/2)(4 - 26) = -11\hbar/30$$

38.

$$A = 1/\sqrt{33}\ ,\ a = 4i\ ,\ b = 1 - 4i \quad \Rightarrow \quad \Delta S_x = (\hbar/2)\sqrt{1 - ((2/33)\cdot(-16))^2} = 0.122\hbar$$

39. $[\hat{L}_x, \hat{p}_x] f(x, y, z) = 0$, siden $\hat{L}_x$ inneholder deriverte mhp y og z, mens $\hat{p}_x$ inneholder derivert mhp x.

40. $[\hat{p}_x, x^2] f(x, y, z) = (\hbar/i)\partial_x(x^2 f) - (\hbar/i)(x^2)\partial_x f = (2\hbar x/i) f$.