TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag til eksamen 7. desember 2020

For de fleste oppgavene var det mellom tre og seks varianter. Hver student fikk da en tilfeldig trukket variant. Dette løsningsforslaget er basert på en tilfeldig serie med varianter.

---

1. Midlere de Broglie–bølgelengde for RbBr–gass ved 400 K, der atomære masser er hhv 70.965u og 66.965u:

$$\lambda = h/\sqrt{3mk_BT} \simeq 12\,\mathrm{pm}$$

2. Hvileenergi for urankjerne med 238 nukleoner:

$$E_0 = mc^2 = 238u \cdot c^2 = 222\,\mathrm{GeV}$$

3. v/c for kjerne med 27 nukleoner og kinetisk energi 12.0 GeV: Fra $E = K + mc^2$ og $E = \gamma mc^2$ følger det at

$$v/c = \sqrt{1 - (mc^2/(K + mc^2))^2},$$

som med $mc^2 = 25.2$ GeV blir ca 0.74.

4. λ for Kr-atom med masse 84u og kinetisk energi 69.7 meV:

$$\lambda = h/p = h/\sqrt{2mK} = 11.8\,\mathrm{pm}$$

5. E_2 for Mg^{11+} er $-13.6\,\mathrm{eV} \cdot (12/2)^2 = -490$ eV.

6. λ for overgangen 3p til 1s i Mg^{11+}:

$$\lambda = hc/\Delta E = hc/(E_3 - E_1) = 711\,\mathrm{pm},$$

siden $E_n = -13.6\,\mathrm{eV} \cdot (Z/n)^2$ og $Z = 12$.

7. λ for overgangen 3 til 1 i 1D boks med bredde L (og med elektron):

$$\lambda = hc/\Delta E = hc \cdot (8m_eL^2/h^2)/(9-1) = m_ecL^2/h.$$

8. $P(|x| < L/7)$ i 1. eksiterte tilstand $\psi_2(x) = \sqrt{2/L}\sin(2\pi x/L)$:

$$P = \frac{2}{L} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{L/7}(1 - \cos(4\pi x/L))dx = 2/7 - (1/2\pi)\sin(4\pi/7) = 0.131.$$

9. Forventningsverdien til E/E_1 med $c_1 = 3/9$, $c_3 = 6/9$ og $c_5 = 6/9$:

$$\langle E/E_1\rangle = 1 \cdot (3/9)^2 + 9 \cdot (6/9)^2 + 25 \cdot (6/9)^2 = 15.22$$

10. Når figuren viser en $\psi(x)$ som er symmetrisk uten nullpunkter, er det klart at det er grunntilstanden det handler om. Dermed er energien -7.71 eV når svaralternativene sammenholdes med den øverste figuren.

11. Med 7 elektroner har vi 2 elektroner i hver av de 3 nederste energinivåene og 1 elektron i 4. nivå. Dette mest energirike elektronet har da energi -3.53 eV, så fotonet må ha energi minst 3.53 eV for å løsrive et elektron fra atomet.

12. Fra figuren ser vi her at $\lambda = 1/4$ nm, dvs kinetisk energi er $K = h^2/2m_e\lambda^2 = 23.9$ eV. Dermed, siden potensialet er $V = -8$ eV, er total energi $E = 15.9$ eV.

13. Her ser vi at bølgelengden er (praktisk talt) lik for A og B, for C og D, og for E og F. Da må tilsvarende også gjelde for energiverdiene. Vi ser videre at A og B er grunntilstanden og 1. eksiterte tilstand, C og D er

2. og 3. eksiterte tilstand, og E og F er 4. og 5. eksiterte tilstand. Figuren øverst og svaralternativene tilsier dermed at $E_A \simeq E_B \simeq -421$ eV, $E_C \simeq E_D \simeq -363$ eV, og $E_E \simeq E_F \simeq -269$ eV.

14. Treghetsmomentet er $I = 2md^2$, der m er 16u og d er 116.3 pm. Rotasjonsenergiene er $K_{\text{rot}} = l(l+1)\hbar^2/2I$. En overgang fra en tilstand med $l = 3$ til en tilstand med $l = 2$ gir da

$$E = \Delta K_{\text{rot}} = 192\,\mu\text{eV}.$$

15. Rekkeutvikling av V_M til 2. orden i $q - q_0$ gir $V_M(q) \simeq -V_0 + V_0\alpha^2(q - q_0)^2$, som sammenlignet med den oppgitte "generiske" formen gir $V_0\alpha^2 = m\omega^2/2$, dvs $\hbar\omega/2 = \hbar\alpha\sqrt{V_0/2m}$. Med $\alpha = 21.1 \cdot 10^9$ pr m, $V_0 = 3.60$ eV, samt $m = (1/1u + 1/35u)^{-1}$ blir dette ca 185 meV.

16. Bånd 1: 0-9 nullpunkter, bånd 2: 10-19 nullpunkter, bånd 3: 20-29 nullpunkter. Her har vi hhv 28, 8 og 15 nullpunkter, som er tilstander i hhv bånd 3, 1 og 2.

17. $2\pi/k$ er bølgelengden i funksjonen $\sin kz$ (evt $\cos kz$). Her viser figuren at $\lambda = 2\pi/k = 58$ nm.

18. På øyemål anslår jeg at $E_1 \simeq -186$ meV og at $E_2 \simeq -133$ meV. Da er $\Delta E \simeq 53$ meV og $\lambda = hc/\Delta E \simeq 23\,\mu$m. Da må svaret være 27 μm.

19. Med $E = 1.01V_0$ blir $T = 0.057$.

20. Med $E = 1.22V_0$ er $kL = 10.576$ og $qL = 4.491$ slik at $T = 4kq/(k+q)^2 = 4 \cdot 10.576 \cdot 4.491/(10.576 + 4.491)^2 = 0.837$.

21. Tilstanden (10) er proporsjonal med x (samt r, som ikke påvirkes av dreieimpulsoperatorene). Da er

$$\hat{L}_z(10) \sim -y\frac{\partial}{\partial x}x \sim y \sim (01),$$

dvs (10) er ikke en egenfunksjon til $\hat{L}_z$, og L_z er uskarp.

22. $(10) \sim x \sim \cos\phi \sim \exp(i\phi) + \exp(-i\phi)$ slik at $\langle L_z\rangle = 0.5 \cdot \hbar + 0.5 \cdot (-\hbar) = 0$.

23. $\hat{L}^2(01) \sim \hat{L}^2 y \sim -\hbar^2(\partial^2/\partial\phi^2)\sin\phi = +\hbar^2\sin\phi$ slik at $L^2 = \hbar^2$.

24. $E = (n_x + 1/2)\hbar\omega + (n_y + 1/2)\cdot 3\hbar\omega = (n_x + 3n_y + 2)\hbar\omega$ og $n_x + 3n_y + 2 = 11$ for $(n_x, n_y) = (9,0), (6,1), (3,2)$ og $(0,3)$. Dermed degenerasjonsgrad 4.

25. $E(3,2) = (3 + 6 + 2)\hbar\omega = 11\hbar\omega$.

26. $K(345) = E(345) = (3^2 + 4^2 + 5^2)\pi^2\hbar^2/2m_eL^2 = 4.67$ eV.

27. Det er oppgitt at $dN = CV\sqrt{E}dE$ med $C = (\pi/2)(2m_e/\pi^2\hbar^2)^{3/2}$. Da er

$$n = N/V = C\int_0^{E_F}\sqrt{E}dE = (2C/3)E_F^{3/2}$$

slik at $E_F = (3n/2C)^{2/3}$. Med f eks $n = 6.5 \cdot 10^{28}$ pr kubikkmeter blir $E_F = 5.85$ eV.

28. Minimum for potensialet $Ar^2 + B/r^2$ når den deriverte er lik null, dvs for $2Ar - 2B/r^3 = 0$, dvs $r^4 = B/A$, dvs $r^2 = \sqrt{B/A}$. Det gir $V_{\text{eff,min}} = \sqrt{AB} + \sqrt{AB} = \sqrt{4AB}$. Her er $A = m\omega^2/2$ og $B = l(l+1)\hbar^2/2m$ slik at $V_{\text{eff,min}} = \sqrt{l(l+1)}\hbar\omega$. Med f eks $l = 6$ blir dette $\sqrt{42}\hbar\omega = 6.48\hbar\omega$.

29. Venderadier der $E = V_{\text{eff}} = Ar^2 + B/r^2$, som er en andregradsligning i r^2 med løsninger $r^2 = (E/m\omega^2)(1 \pm \sqrt{1 - l(l+1)\hbar^2\omega^2/E^2})$ etter innsetting for A og B. Minustegnet gir her indre venderadius. Med energi $E = (N/2)\hbar\omega$ har vi

$$r_i^2 = (N/2)(\hbar/m\omega)(1 - \sqrt{1 - l(l+1)/(N/2)^2}),$$

som f eks med $N = 13$ og $l = 4$ gir $r_i = 1.335\sqrt{\hbar/m\omega}$.

30. Vinkel mellom $\boldsymbol{L}$ og xy-planet: $\beta = 90° - \arccos(L_z/L)$. Her er $L_z = m\hbar$ og $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$, slik at med f eks $l = 6$ og $m = 5$ blir $\beta = 50°$.

31. $n = l + 1 + n_r$ der det radielle kvantetallet n_r er lik antall nullpunkter i radialfunksjonen R_{nl}. Med f eks $n = 8$ og $l = 2$ blir $n_r = 5$.

32. Med f eks $n = 4$ og $l = 1$ er nullpunktene gitt ved $1 - x/4 + x^2/80 = 0$, der $x = r/a_0$. Løsninger her er $x = 5.53$ og $x = 14.47$.

33. Med fortegnsvalg som i formelarket blir det slik:
$\psi_{21-1} - \psi_{211} \sim Y_{1-1} - Y_{11} \sim p_x$ som gir $L_x = 0$.
Men som påpekt av en våken student på eksamen: Med fortegn som i ligning 5.103 i Hemmer blir svaret på begge varianter av denne oppgaven "uskarp". Siden mer enn et av svarene var riktig, gis det automatisk poeng til alle på denne oppgaven.

34. For ψ_{522} er $L_z = 2\hbar$, dvs skarp. Da er L_y uskarp.

35. Med f eks $a = 6 + 2i$ og $b = 1 - 2i$ er $1 = A^2 \cdot (36 + 4 + 1 + 4)$, dvs $A = 1/\sqrt{45}$.

36. Med f eks $a = -i$ og $b = 1$ er spinntilstanden ikke en egenfunksjon til $\hat{S}_x$, slik at S_x er uskarp.

37. Med f eks $a = i + 2$ og $b = 3i - 4$ er $\langle S_z \rangle = -\hbar/3$.

38. Med f eks $a = 6 + 2i$ og $b = 1 - 2i$ er sannsynligheten for å måle $S_z = -\hbar/2$ gitt ved $P_- = |1 - 2i|^2/(|1 - 2i|^2 + |6 + 2i|^2) = 5/(5 + 40) = 0.111$.

39. $\hat{p}_x$ og $\hat{p}_y$ kommuterer med hverandre, uavhengig av antall potenser av den ene eller den andre. Dermed Null.

40. $[\hat{L}_y, z] = ix\hbar$.