TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag til Eksamen 12. august 2021

1) **A**: Med $\lambda = 99.0$ pm er $E = hc/\lambda = 2.00 \cdot 10^{-15}$ J $= 12.5$ keV

2) **E**: Molekylets masse er $(12 \cdot 60 + 19 \cdot 48) \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} = 2.71 \cdot 10^{-24}$ kg slik at $\lambda = h/\sqrt{3mk_BT} = 3.6$ pm

3) **F**: Midlere translasjonsenergi er $3k_BT/2$ (3 kvadratiske frihetsgrader), slik at $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_BT/m} = 68$ m/s

4) **A**: Molekylet er ikke lineært og har dermed 3 kvadratiske rotasjonsfrihetsgrader, slik at midlere rotasjonsenergi pr molekyl er $3k_BT/2$, det samme som midlere translasjonsenergi. Ved 300 K er dette 39 meV

5) **D**: Total energi: $E = K + m_pc^2 = 1389$ MeV. Fra $E^2 = (pc)^2 + (m_pc^2)^2$ følger det at impulsen er $p = (1/c)\sqrt{E^2 - (m_pc^2)^2} = 1024$ MeV/c

6) **B**: Masse 34u gir hvileenergi $mc^2 = 31.7$ GeV, og dermed total energi $E = 59.7$ GeV. Impulsen kvadrert blir da $(pc)^2 = E^2 - (mc^2)^2 = 2559$ GeV^2. Omskriving av uttrykket for relativistisk impuls gir $v^2/c^2 = 1/(1 + (mc^2/pc)^2)$, hvoretter innsetting av tallverdiene $mc^2 = 31.7$ GeV og utregnet verdi for $(pc)^2$ til slutt gir $v/c \simeq 0.847$, dvs $v \simeq 2.54 \cdot 10^8$ m/s

7) **C**: Dette er partikkel i boks, med boksbredde $L = 4.2$ nm. Kvantiserte energinivåer er $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2m_eL^2$. Dermed: $\lambda = hc/(E_4 - E_1) = 3.9\,\mu$m

8) **C**: Absoluttkvadratet av $\Psi(x,t)$ blir på formen $f(x) + g(x)\cos\left(\frac{(E_5-E_4)t}{\hbar}\right)$, som oscillerer med frekvens $f = 1/T = (E_5 - E_4)/2\pi\hbar = 46$ THz

9) **C**: Sannsynligheten for å måle E_2 er $|c_2|^2$, der

$$c_2 = \int_0^L \psi_2^*(x)\Psi(x,0)dx.$$

Med $\psi_2^*(x) = \psi_2(x) = \sqrt{2/L}\sin(2\pi x/L)$ og $\Psi(x,0)$ som oppgitt, har vi

$$c_2 = (\sqrt{32}/L) \cdot \int_{3L/8}^{4L/8} \sin(2\pi x/L)dx = (\sqrt{8}/\pi) \cdot (1 - 1/\sqrt{2}) = 0.2637.$$

Dermed er $|c_2|^2 = 0.0695 \simeq 7\%$

10) **A**: Siden $\psi_1(x)$ er symmetrisk mens $\Psi(x,0)$ er antisymmetrisk (om $L/2$), blir $c_1 = 0$

11) **E**: $k = \omega^2 m = (2\pi f)^2 m = 3.8$ kN/m

12) **D**: $E = hf = 6.0 \cdot 10^{-20}$ J $= 375$ meV $\simeq 0.38$ eV

13) **B**: $\exp(-\hbar\omega/k_BT) = \exp(-hf/k_BT) \simeq \exp(-375/26) \simeq 5 \cdot 10^{-7}$

14) **C**: Det gitte potensialet $E(R)$ er tilnærmet harmonisk (dvs kvadratisk) omkring minimumspunktet R_0, med $E(R_0) = 0$. Med R i nærheten av R_0 kan vi skrive

$$E(R) \simeq E_0 \left[1 - 1 + \alpha(R - R_0)\right]^2 = E_0\alpha^2(R - R_0)^2,$$

og sammenligner vi med den generelle formen $(m\omega^2/2)(R - R_0)^2$ for en harmonisk oscillator, ser vi at vi må velge

$$\alpha = \sqrt{m/2E_0} \cdot 2\pi f = 34.6 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1},$$

dvs $\alpha \simeq 35$ pr nm

15) **A**: Molekylets treghetsmoment (mhp en akse gjennom CM, som er lokalisert midt mellom de to N-atomene) er $I_0 = 2m_{\rm N}(R_0/2)^2 = 7uR_0^2$. Kinetisk rotasjonsenergi er kvantisert, siden $L^2 = l(l+1)\hbar^2$ $(l = 0, 1, 2\ldots)$. Energiforskjellen mellom de to laveste rotasjonsnivåene er derfor

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{I_0} = \frac{\hbar^2}{7uR_0^2} = 7.84 \cdot 10^{-23} \text{ J} = 0.49 \text{ meV}.$$

16) **A**: I alt 14 elektroner og 2 elektroner i hver molekylorbital (et med spinn opp og et med spinn ned) gir 7 molekylorbitaler okkupert av elektroner.

17) **D**: $[x, y] = xy - yx = 0$

18) **F**: Her er det tryggest å la kommutatoren virke på en generell funksjon $f(x, y)$. Resultatet blir $[\hat{p}_x\hat{p}_y, xy]f(x, y) = \ldots = (\hbar/i)\,(\hbar/i + x\hat{p}_x + y\hat{p}_y)\,f/x, y)$

19) **B**: Her er $E = (n_x + n_y + n_z + 3/2)\hbar\omega$ slik at vi må finne hvor mange muligheter vi har for å ha $n_x + n_y + n_z = 4/2 = 2$: (200), (020), (002), (110), (101), (011), dvs 6 stk.

20) **B**: (100) $\sim x$ ganget med en funksjon av r og θ, dvs (100) $\sim \cos\phi \cdot f(r, \theta)$. Siden $\hat{L}_z = (\hbar/i)\partial/\partial\phi$, er (100) ikke en egenfunksjon til $\hat{L}_z$, slik at L_z er uskarp.

21) **A**: Siden tilstanden (001) ikke avhenger av vinkelen ϕ (bare av r og vinkelen θ), og $\hat{L}_z = (\hbar/i)\partial/\partial\phi$, blir $L_z = 0$ i denne tilstanden.

22) **C**: Innsetting av den gitte prøveløsningen gir

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{ma^2} \left(1 - \cos ka\right).$$

Det betyr at $\hbar^2/ma^2 = E_0$, dvs $m = \hbar^2/E_0 a^2$, som med oppgitte verdier for E_0 og a gir $m = 1.1 \cdot 10^{-31}$ kg, dvs $m = 0.12 m_e$

23) **C**: Siden $\cos ka$ kan variere mellom -1 og $+1$, blir båndbredden $2E_0 =$ 5.0 eV

24) **D**: Tre nullpunkter i a, dermed 3. eksiterte tilstand.

25) **A**: Ingen nullpunkter i c, dermed grunntilstanden.

26) **F**: Tilstandene b og c har krumning bort fra x-aksen der $V = 0$. Dermed har disse to tilstandene $E < 0$.

27) **C**: Figuren antyder vel at ψ_a har en halv bølgelengde omtrent lik 4 nm i området der $V = 0$ eV. Det betyr at (den kinetiske) energien her er omtrent $\hbar^2 k_a^2/2m_e = 4\pi^2\hbar^2/2m_e\lambda_a^2 = 0.02$ eV.

28) **B**: $\lambda \simeq 2.5$ nm der $V = 0$ eV, kanskje noe mer, slik at energien her er omtrent $\hbar^2 k^2/2m_e = 4\pi^2\hbar^2/2m_e\lambda^2 = 0.24$ eV; kanskje noe mindre. Da passer det nok best med 0.2 eV.

29) **D**: Den ene er symmetrisk, den andre er antisymmetrisk.

30) **D**: 2. eksiterte tilstand er symmetrisk, som grunntilstanden. Grunntilstanden vil ha en halv bølgelengde omtrent lik bredden av en av de to brønnene. Vi ser av figuren at 2. eksiterte tilstand har en hel bølgelengde omtrent lik bredden av en av de to brønnene. Siden energien er omvendt proporsjonal med kvadratet av bølgelengden, blir energien i 2. eksiterte tilstand omtrent fire ganger større enn energien i grunntilstanden.

31) **E**: Ti nullpunkter, dermed 10. eksiterte tilstand.

32) **B**: Disse tilstandene har paritet $(-1)^l$ som med $l = 1$ betyr odde paritet

33) **C**: Vi har $p_x = (Y_{1-1} - Y_{11})/\sqrt{2}$ og $p_y = i(Y_{1-1} + Y_{11})/\sqrt{2}$, slik at $Y_{1-1} = (p_x - ip_y)/\sqrt{2}$

34) **A**: Her er integranden antisymmetrisk og $\langle p \rangle = 0$. En alternativ måte å argumentere på er at $\Psi(x, 0)$ må være kompleks og ikke reell for å gi en midlere impuls ulik null.

35) **D**: Normering gir $1 = A^2(25+4+9+25) = 63A^2$ slik at $A = 1/\sqrt{63}$.

36) **A**: χ er her egenfunksjon til operatoren for S_y, med egenverdi $\hbar/2$.

37) **B**: $\langle S_x \rangle = \chi^\dagger \widehat{S}_x \chi = \hbar/3$

38) **B**: $P(+\hbar/2) = |4-2i|^2/(|4-2i|^2+|i+7|^2) = 20/(20+50) = 2/7 = 0.286$

39) **C**: Her må rett svar være $3\hbar^2/4$: $|S| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$ og $s = 1/2$.

40) **F**: Argumentet til deltafunksjonen er null for $x = 1$, slik at integralet blir $1+1-5-3 = -6$.