TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag til Eksamen 7. desember 2021

1) **C**: $p = \hbar k$

2) **F**: $E = \hbar\omega$

3) **E**: $j = \hbar k/m$

4) **A**: Kvantisering av størrelser som energi og dreieimpuls henger sammen med at "kvantesprangene" mellom tillatte verdier er proporsjonale med $\hbar$. Grensen $\hbar \to 0$ vil dermed gjøre alle verdier tillatt, som i klassisk mekanikk.

5) **D**: Molekylets masse er $12 \cdot 60 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} = 1.195 \cdot 10^{-24}$ kg slik at $\lambda = h/\sqrt{3mk_BT} = 5.4$ pm

6) **B**: Midlere transl.energi er $3k_BT/2$ (3 kvadr. frihetsgr.), slik at $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_BT/m} = 102$ m/s

7) **B**: Molekylet har 3 kvadratiske rotasjonsfrihetsgrader, slik at midlere rotasjonsenergi pr molekyl er $3k_BT/2$, det samme som midlere translasjonsenergi. Ved 300 K er dette 39 meV

8) **F**: Masse 197u gir hvileenergi $mc^2 = 184$ GeV, og dermed total energi $E = mc^2 + K = (184 + 170)$ GeV $= 354$ GeV. Med K av samme størrelsesorden som mc^2 må vi regne relativistisk. Impulsen blir da $p = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2}/c = 302$ GeV/c

9) **C**: Energinivåer: $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2mL^2 = n^2h^2/8mL^2$. Dermed er $\lambda = hc/(E_4 - E_1) = 8mcL^2/15h$

10) **D**: Absoluttkvadratet av $\Psi(x,t)$ blir på formen $f(x) + g(x)\cos\left(\frac{(E_5-E_3)t}{\hbar}\right)$, som oscillerer med frekvens $\nu = (E_5 - E_3)/2\pi\hbar = (16h^2/8mL^2)/h = 2h/mL^2$

11) **A**: Sannsynligheten for å måle E_2 er $P_2 = |c_2|^2$, med

$$c_2 = \int_0^L \psi_2^*(x)\Psi(x,0)dx.$$

Her er $\psi_2^*(x) = \psi_2(x)$ antisymmetrisk og $\Psi(x,0)$ symmetrisk på intervallet $0 < x < L$. Da blir $P_2 = 0$.

12) **E**: På intervallet $0 < x < L/2$, der $\Psi(x,0)$ er forskjellig fra null, og symmetrisk, er også $\psi_2(x) = \sqrt{2/L}\sin(2\pi x/L)$ symmetrisk. Dermed:

$$c_2 = 2\int_0^{L/4} \psi_2(x)\Psi(x,0)dx = \frac{\sqrt{192}}{2\pi^2}\int_0^{\pi/2} z\,\sin z\,dz = \frac{\sqrt{192}}{2\pi^2},$$

der vi substituerte $z = 2\pi x/L$, dvs $x = zL/2\pi$ og $dx = dz\,L/2\pi$. Sannsynligheten for å måle energiverdien E_2 blir $P_2 = c_2^2 = 192/4\pi^4 = 0.49$.

13) **F**: Klassisk forbudt område hvis $E_3 = 7\hbar\omega/2$ er mindre enn $V(x) = m\omega^2x^2/2$, dvs $|x| > \sqrt{7\hbar/m\omega}$.

14) B: Klassisk forbudt område i grunntilstanden tilsvarer $|x| > \sqrt{\hbar/m\omega} \equiv x_0$, dvs $|y| = |x/x_0| > 1$. Sannsynligheten P_F for å finne partikkelen i det klassisk forbudte området er $P_F = 1 - P_T$, der P_T er sannsynligheten for å finne partikkelen i det klassisk tillatte området,

$$P_T = \int_{-x_0}^{x_0} \psi_0^2(x)\,dx = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\sqrt{\hbar/m\omega}}^{\sqrt{\hbar/m\omega}} \exp(-m\omega x^2/\hbar)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \exp(-y^2)\,dy \simeq \frac{1.49365}{1.77245} \simeq 0.843.$$

Dermed er $P_F = 1 - 0.843 = 0.157$.

15) D: Symmetrien i de fire koeffisientene tilsier at $\langle E\rangle$ må ligge midt mellom E_4 og E_5, dvs $5\hbar\omega$. Eventuelt:

$$\langle E\rangle = \sum_{j=3}^{6} |c_j|^2 E_j = \frac{E_3}{8} + \frac{3E_4}{8} + \frac{3E_5}{8} + \frac{E_6}{8} = \frac{80}{8\cdot 2}\hbar\omega = 5\hbar\omega$$

16) E: Målingen påvirker partikkelen: Den havner her i 5. eksiterte tilstand ψ_5 med skarp energi $E_5 = (5+1/2)\hbar\omega = 11\hbar\omega/2$.

17) C: Innsetting av den oppgitte bølgefunksjonen gir

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(e^{ika} - 2 + e^{-ika}\right)e^{ikna} = E(k)e^{ikna},$$

dvs

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{ma^2}\left(1 - \cos ka\right).$$

Nær $k = 0$ (dvs $ka \ll 1$ eller $\lambda = 2\pi/k \gg a$) er $\cos ka \simeq 1 - (ka)^2/2$ og $E(k) \simeq (\hbar k)^2/2m$. Ingen overraskelse, og noe vi vel kunne ha sagt uten å regne.

18) C: Minste tillatte energi er $E = 0$ for $k = 0$. Største tillatte energi er $E = 2\hbar^2/ma^2$ for $k = \pm\pi/a$.

19) B: Ett nullpunkt betyr at dette er 1. eksiterte tilstand ψ_1.

20) B: Bølgefunksjonen er lineær der $V(x) = -1.0$ eV. Da er $\psi''(x) = 0$ og $E = V = -1.0$ eV.

21) D: Figuren viser at 1.5 bølgelengder tilsvarer 20 nm i områder med $V = 0$, dvs $\lambda = 40/3$ nm $= 13.3$ nm. Da er energien $E = K = p^2/2m_e = h^2/2m_e\lambda^2 = 8.4$ meV.

22) A: Total energi er $4\cdot(-64 - 46 - 19)$ eV $+\ 2\cdot(-17)$ eV $= -550$ eV.

23) B: Enklest å løsrive et av elektronene i 6. eksiterte tilstand ψ_6, med energi -17 eV. Fritt elektron tilsvarer her $E > 0$. Dermed er ioniseringsenergien 17 eV. (I virkelighetens verden har acetylen en ioniseringsenergi på 11.4 eV.)

24) B: Med 7 nullpunkter er dette ψ_7, med energi $E_7 = -17$ eV.

25) E: Vinkeldelen $|Y_{20}|^2 \sim (3\cos^2\theta - 1)^2$ er maksimal for $\theta = 0$ og $\theta = \pi$, dvs på z-aksen. R_{32} og R_{32}^2 har ett felles maksimalpunkt, gitt ved (med $x = r/a_0$)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\,e^{-x/3}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 6 \quad\Rightarrow\quad r = 6a_0.$$

Dermed de to posisjonene $(0, 0, \pm 6a_0)$.

26) **E**: $\arccos(L_z/L) = \arccos(1/\sqrt{2\cdot 3}) = 66°$

27) **A**: $\sin^2\theta(\cos 2\phi + i\sin 2\phi) = \sin^2\theta\cos^2\phi - \sin^2\theta\sin^2\phi + 2i\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi =$
$(x^2 - y^2 + 2ixy)/r^2 = (x+iy)^2/r^2$

28) **F**: $E = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega = 10\hbar\omega$ betyr at $n_x + n_y = 9$, som kan realiseres med $n_x = 0, 1, 2, \ldots, 9$, dvs 10 muligheter.

29) **B**: Denne lineærkombinasjonen er proporsjonal med $x - iy$, dvs med $\exp(-i\phi)$, så L_z er skarp med verdi $-\hbar$.

30) **E**: Tilstanden (11) er prop. med xy, og dermed med $\sin\phi\cdot\cos\phi$ eller $\sin 2\phi$. Mulige måleresultater er derfor $\pm 2\hbar$

31) **D**: Minst kinetisk energi i tilstanden med $n_x = n_y = 1$, dvs $K_{\min} = \pi^2\hbar^2/m_e L^2 = m_e v_{\min}^2/2$. Det gir $v_{\min} = \sqrt{2}\pi\hbar/m_e L = 5.1$ km/s

32) **A**: Arealet er 10^{-14} m^2, og med tetthet 10^{18} pr m^2 har vi derfor 10^4 elektroner i systemet. Vi kan ha 2 elektroner i hver orbital, et med spinn opp og et med spinn ned. Vi trenger derfor å okkupere 5000 orbitaler. I et koordinatsystem med n_x og n_y langs aksene vil hver orbital oppta et areal lik 1. De 5000 okkuperte orbitalene (med de 5000 laveste energiene) befinner seg derfor på en kvartsirkel i den "positive kvadranten", med radius $\sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sqrt{2m_e L^2 E_{\max}}/\pi\hbar$, og med areal $(n_x^2 + n_y^2)\pi/4 = 5000$. Vi kombinerer dette og finner at maksimal kinetisk energi er $K_{\max} = E_{\max} = (20000/\pi)\cdot\pi^2\hbar^2/2m_e L^2$. Samtidig er $v_{\max} = \sqrt{2K_{\max}/m_e}$, som med tallverdier innsatt er ca 289 km/s

33) **F**: Med $B = 7$ T er $\Delta E = 2\mu_B B = 0.81$ meV

34) **D**: $\theta = \arccos(S_z/S) = \arccos(1/\sqrt{3}) = 54.7°$

35) **A**: χ er egenfunksjon til $\widehat{S}_y$, med egenverdi $\hbar/2$. Da er både S_x og S_z uskarpe.

36) **C**: χ er egenfunksjon til $\widehat{S}_y$, med egenverdi $\hbar/2$.

37) **C**:

$$\langle S_z\rangle = \chi^\dagger\widehat{S}_z\chi = \frac{\hbar}{2\cdot 30}\,(-2i+3 \quad -i-4)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2i+3\\ i-4\end{pmatrix} = -\hbar/15$$

38) **C**: $\langle S_z^2\rangle = \hbar^2/4$ alltid

39) **A**: $\Delta S_x = \hbar/2$, fordi $\langle S_x\rangle = 0$ (da χ_- er egentilstand for $\widehat{S}_z$), og vi alltid har $\langle S_x^2\rangle = \hbar^2/4$

40) **F**: Både Stern og Gerlach pleide å røyke sigarer på laben. Stern var bare assistent og hadde ikke råd til de dyreste sigarene. Han måtte kjøpe billige sigarer med høyt svovelinnhold. Svovel reagerte med sølv og dannet svart og godt synlig sølvsulfid der sølvatomene hadde truffet "detektoren"