**TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag til Eksamen 17. august 2022**

**1)** **D**: $p = \hbar k = 1.05 \cdot 10^{-25}$ kg m/s

**2)** **B**: $E = p^2/2m_e (= \hbar\omega) = 38$ meV

**3)** **E**: $\omega = E/\hbar = 58$ ps$^{-1}$

**4)** **F**: $v = p/m_e = 115$ km/s

**5)** **F**: $j = \hbar k/m = v = 115$ km/s

**6)** **E**: Molekylets masse er $m = (12 + 2 \cdot 16) \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg slik at $\lambda = h/\sqrt{3mk_BT} = 22$ pm.

**7)** **C**: Midlere transl.energi er $3k_BT/2$ (3 kvadr. frihetsgr.), slik at $v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_BT/m} = 412$ m/s.

**8)** **B**: Molekylet er lineært og har derfor 2 kvadratiske rotasjonsfrihetsgrader, slik at midlere rotasjonsenergi pr molekyl er $2k_BT/2$. Ved 300 K er dette 26 meV.

**9)** **D**: Energinivåer: $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2m_eL^2 = n^2h^2/8m_eL^2$. Dermed er $\lambda = hc/(E_4 - E_3) = 8m_ecL^2/7h = 7.6\,\mu$m.

**10)** **B**: Absoluttkvadratet av $\Psi(x,t)$ blir på formen $f(x) + g(x)\cos\left(\frac{(E_4-E_3)t}{\hbar}\right)$, som oscillerer med periode $T = 2\pi\hbar/(E_4 - E_3) = 25$ fs.

**11)** **A**: Sannsynligheten for å måle $E_3$ er $P_3 = |c_3|^2$, med

$$c_3 = \int_0^L \psi_3^*(x)\Psi(x,0)dx.$$

Her er $\psi_3^*(x) = \psi_3(x)$ symmetrisk og $\Psi(x,0)$ antisymmetrisk på intervallet $0 < x < L$. Da blir $P_3 = 0$.

**12)** **B**:

$$c_4 = \int_0^L \psi_4(x)\Psi(x,0)dx = \frac{2L}{L\pi}\int_0^\pi \sin 4z \cos z\, dz = \frac{16}{15\pi},$$

der vi substituerte $z = \pi x/L$, dvs $x = zL/\pi$ og $dx = dz\, L/\pi$. Sannsynligheten for å måle energiverdien $E_4$ blir $P_4 = c_4^2 = 0.12$.

**13)** **C**: Klassisk tillatt område hvis $E_0 = \hbar\omega/2$ er større enn $V(x) = m\omega^2x^2/2$, dvs $|x| < \sqrt{\hbar/m\omega}$. Med gitte tallverdier: $|x| < 5.9$ pm.

**14)** **D**: $n_1/n_0 = \exp(-\hbar\omega/k_BT) = 0.070$.

**15)** **E**:

$$\langle E \rangle = \sum_{j=0}^{3} |c_j|^2 E_j = \frac{4E_0}{10} + \frac{3E_1}{10} + \frac{2E_2}{10} + \frac{E_3}{10} = \frac{3}{2}\hbar\omega = 104\,\mathrm{meV}$$

**16)** **F**: For små verdier av $x$ er $V_M(x) \simeq V_0\alpha^2x^2$, som skal tilsvare $kx^2/2$. Dermed: $k = 2V_0\alpha^2$.

**17)** **C**: Innsetting av den oppgitte bølgefunksjonen gir

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(e^{ika}-2+e^{-ika}\right)e^{ikna}=E(k)e^{ikna},$$

dvs

$$E(k)=\frac{\hbar^2}{ma^2}\left(1-\cos ka\right).$$

Nær $k=0$ (dvs $ka \ll 1$ eller $\lambda = 2\pi/k \gg a$) er $\cos ka \simeq 1-(ka)^2/2$ og $E(k) \simeq (\hbar k)^2/2m$.

**18)** **B**: Minste tillatte energi er $E=0$ for $k=0$. Største tillatte energi er $E=2\hbar^2/m_ea^2$ for $k=\pm\pi/a$. Dermed er båndbredden $2\hbar^2/m_ea^2=1.68$ eV.

**19)** **C**: Fire nullpunkter betyr at dette er 4. eksiterte tilstand $\psi_4$.

**20)** **E**: Seks nullpunkter betyr at dette er 6. eksiterte tilstand $\psi_6$.

**21)** **B**: Oppgitte nullpunkter tilsier at en halv bølgelengde er 0.8 nm der potensialet har verdien -2.00 eV. Da har elektronet en kinetisk energi ca 0.58 eV, og dermed energiegenverdi ca -1.4 eV.

**22)** **E**: Vi ser av figuren for $\psi_6$ at bølgefunksjonen krummer svakt bort fra $x$-aksen i området der potensialet har verdien -1.00 eV. Da konkluderer vi med at energiegenverdien er like i underkant av -1.0 eV.

**23)** **F**: 30 elektroner okkuperer 15 romlige tilstander.

**24)** **A**: 19 nullpunkter tilsier at dette er $\psi_{19}$, med energi $E_{19}=-8.5$ eV.

**25)** **A**: $R_{20}^2$ er maksimal i $r=0$.

**26)** **C**: $(rR_{20})^2$ er maksimal i $r/a_0 = 3-\sqrt{5} \simeq 0.764$.

**27)** **F**:

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty r(rR_{20})^2 dr = \ldots = 6a_0.$$

**28)** **D**: $E=(n_x+n_y+1)\hbar\omega = 5\hbar\omega$ betyr at $n_x+n_y=4$, som kan realiseres med $n_x=0,1,2,3,4$, dvs 5 muligheter.

**29)** **E**: Tilstanden (01) er prop. med $y$, og dermed med $\sin\phi$. Mulige måleresultater er derfor $\pm\hbar$.

**30)** **F**: Tilstanden (11) er prop. med $xy$, og dermed med $\sin\phi\cdot\cos\phi$ eller $\sin 2\phi$. Mulige måleresultater er derfor $\pm 2\hbar$.

**31)** **C**: Minst kinetisk energi i tilstanden med alle tre $n_j=1$, dvs $K_{\min}=3\pi^2\hbar^2/2m_eL^2$, som er ca 11 meV.

**32**) **A**: Volumet er $10^{-18}$ cm$^3$, og med antallstetthet $10^{21}$ pr cm$^3$ har vi derfor $10^3$ elektroner i systemet. Vi kan ha 2 elektroner i hver orbital, et med spinn opp og et med spinn ned. Vi trenger derfor å okkupere 500 orbitaler. I et koordinatsystem med $n_x$, $n_y$ og $n_z$ langs aksene vil hver orbital oppta et volum lik 1. De 500 okkuperte orbitalene (med de 500 laveste energiene) befinner seg derfor i 1/8 kule i den "positive oktanten", med radius $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{2m_e L^2 E_{\max}}/\pi\hbar$, og med volum $(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{3/2}\pi/6 = 500$. Vi kombinerer dette og finner at maksimal kinetisk energi er $K_{\max} = E_{\max} = (3000/\pi)^{2/3} \cdot \pi^2\hbar^2/2m_e L^2$. Med tallverdier innsatt blir dette 0.36 eV.

**33**) **E**: Med $B = 6.0$ T er $\Delta E = 2\mu_B B = 0.69$ meV. (Der $\mu_B = e\hbar/2m_e$.)

**34**) **B**: $\theta = 90° - \arccos(S_z/S) = 90° - \arccos(1/\sqrt{3}) = 35.3°$

**35**) **A**: $\chi$ er egenfunksjon til $\widehat{S}_y$, med egenverdi $\hbar/2$. Da er $S_x$ uskarp.

**36**) **A**: $\chi$ er egenfunksjon til $\widehat{S}_y$, med egenverdi $\hbar/2$. Da er $S_z$ uskarp.

**37**) **C**:

$$\langle S_z \rangle = \chi^\dagger \widehat{S}_z \chi = \frac{\hbar}{2 \cdot 18} \left(-2i + 3 \quad -2i - 1\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i + 3 \\ 2i - 1 \end{pmatrix} = 2\hbar/9$$

**38**) **C**: $\langle S_z^2 \rangle = \hbar^2/4$ alltid.

**39**) **D**: $\Delta S_y = \hbar/2$, fordi $\langle S_y \rangle = 0$ (da $\chi_+$ er egentilstand for $\widehat{S}_z$), og vi alltid har $\langle S_y^2 \rangle = \hbar^2/4$.

**40**) **F**: Både Stern og Gerlach pleide å røyke sigarer på laben. Stern var bare assistent og hadde ikke råd til de dyreste sigarene. Han måtte kjøpe billige sigarer med høyt svovelinnhold. Svovel reagerte med sølv og dannet svart og godt synlig sølvsulfid der sølvatomene hadde truffet "detektoren".