TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag 13. desember 2022

1A) I den klassiske grensen er $\exp(hc/k_BT\lambda) - 1 \simeq hc/k_BT\lambda$. Det betyr at $dj/d\lambda \sim 1/\lambda^4$ i den klassiske grensen, dvs for store bølgelengder.

2D) $z = 2\pi \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 3.00 \cdot 10^8 / 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 0.00290 = 4.95 \simeq 5$

3B) $z_1 = 3.1606$, $z_2 = 4.7880$, $z_3 = 4.9584$, $z_4 = 4.9649$, $z_5 = 4.9651$, $z_6 = 4.9651$. Vi ser at 4 beregninger av høyre side gir z med 4 gjeldende sifre.

4F) $P = j \cdot A = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2$. Med oppgitte tall: $P = 1.96 \cdot 10^{17}$ W

5F) Fra formelvedlegget: $m_e c^2/100 = 5.11$ keV. Dermed: $Z > \sqrt{5110/13.6} = 19.4$, dvs $Z \geq 20$

6D) $E_1 = K_1 = m_e v_1^2/2 = \pi^2\hbar^2/2m_eL^2$ gir $v_1 = \pi\hbar/m_eL \simeq 181$ km/s

7C) $\lambda = 2\pi\hbar c/(E_2 - E_1) = 2\pi\hbar c/(3\pi^2\hbar^2/2m_eL^2) = 4m_eL^2c/3\pi\hbar = 4.4\,\mu$m

8E) $P_1 = |c_1|^2$ med $c_1 = (2\sqrt{2}/L)\int_0^{L/2} \sin(\pi x/L)\sin(2\pi x/L)\,dx = (2\sqrt{2}/\pi)\int_0^{\pi/2} \sin z \sin 2z\,dz = (2\sqrt{2}/\pi)\cdot(2/3) = 4\sqrt{2}/3\pi$. Dermed: $P_1 = 32/9\pi^2 = 0.36$

9A) $P_2 = |c_2|^2$ med $c_2 = (2\sqrt{2}/L)\int_0^{L/2} \sin^2(2\pi x/L)\,dx = (\sqrt{2}/\pi)\int_0^{\pi} \sin^2 z\,dz = (\sqrt{2}/\pi)\cdot(\pi/2) = 1/\sqrt{2}$. Dermed: $P_2 = 1/2 = 0.50$

10C) $\langle E\rangle = (E_1+E_4)/6+(E_2+E_3)/3 = E_1\cdot(1/6+16/6+4/3+9/3) = 43E_1/6$, med $E_1 = \pi^2\hbar^2/2m_eL^2$. Innsetting av tallverdier gir 0.67 eV.

11F) $E_n = (n+1/2)\hbar\omega = (n+1/2)\hbar\sqrt{k/m_e}$ slik at de klassiske vendepunktene i grunntilstanden ψ_0, bestemt av $E_0 = kx_0^2/2$, blir $x_0 = \pm(\hbar^2/km_e)^{1/4} = 4.96$ Å. Det klassisk tillatte området har dermed utstrekning 9.9 Å.

12C) $\lambda = 2\pi\hbar c/\hbar\sqrt{k/m_e} = 2\pi c/\sqrt{k/m_e} = 4.0\ \mu$m

13A) Tre par elektroner med motsatt rettet spinn bidrar med null spinn. Dermed er $S = \sqrt{3}\hbar/2$

14C) $E = 2(E_0 + E_1 + E_2) + E_3 = 3.8$ eV

15F) Fra figuren er $\lambda = 4.0$ nm, slik at $v = h/\lambda m_e = 182 \simeq 180$ km/s

16D) Pga 6 nullpunkter er dette 6. eksiterte tilstand. Dermed i alt 7 bundne tilstander.

17D) Fra figuren er $\lambda = 15$ nm der $V = 0$, slik at $E = h^2/2m_e\lambda^2 = 6.6$ meV

18A) Fra figuren er $\lambda_H = 2/3$ nm der $V = 0$ mens $\lambda_V = 1$ nm der $V = 2.0$ eV. Dermed er $K_H/K_V = (\lambda_V/\lambda_H)^2 = 9/4$

19B) Med oppgitt form på $\psi(z)$ og verdier i to posisjoner med avstand $\Delta z = 1$ nm i mellom har vi $\exp(-\kappa\Delta z) = 0.025/0.120$. Dermed er $\kappa = (1/\Delta z)\ \ln 4.8 = 1.57\ \text{nm}^{-1}$

20A) Når $\psi(z)$ er en lineær funksjon, er $d^2\psi/dz^2 = 0$ og dermed $E = V = 2.0$ eV

21B) Når $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 14$, er de tre kvantetallene 1, 2 og 3. Dette kan oppnås på 6 ulike måter, som kombinert med spinndegenerasjon 2 for hver orbital gir total degenerasjonsgrad 12.

22D) Mulighetene for $(n_x\, n_y\, n_z)$, med hhv 3 eller 6 ulike permutasjoner (ombytter) hvis 2 eller 3 kvantetall er ulike, er $(111), (211), (221), (311), (222)$. Tilhørende energier er hhv $3, 6, 9, 11, 12$ i enheten E_0. Maksimalt antall elektroner i disse tilstandene er $2, 6, 6, 6, 2$ nå vi tar hensyn til permutasjoner av kvantetallene og spinndegenerasjon 2 for hver orbital. Summen er 22.

23D) $E = E_0 \cdot (2 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 9) = 87E_0 = 1.3$ eV

24A) Operatoren $\hat{L}_z$ inneholder $x, y, \partial/\partial x$ og $\partial/\partial y$ og kommuterer dermed med $\hat{p}_z$ som kun inneholder $\partial/\partial z$. Da kan L_z og p_z ha skarpe verdier samtidig. $\hat{L}_z$ kommuterer ikke med operatoren for noen av de andre.

25D) $R_{30}(0) \neq 0$ og er dermed nr 2. R_{31} har et nullpunkt for $r > 0$ og er dermed nr 1.

26E) $u^2 \sim x^6 \exp(-2x/3)$ med $x = r/a_0$. Vi setter $du^2/dx = 0$ og finner $x = 9$

27A) $|Y_{2\pm2}|^2 \sim \sin^4\theta$ som er null i $\theta = 0$ og $\theta = \pi$ og maksimal i $\theta = \pi/2$ – dermed nr 3. $|Y_{2\pm1}|^2 \sim \sin^2 2\theta$ som er null i $\theta = 0, \pi, 2\pi$ og maksimal i $\theta = \pi/4$ og $\theta = 3\pi/4$ – dermed nr 2. Og $|Y_{20}|^2$ passer bra med nr 1.

28E) Med $l = 2$ og $m = 2$ er vinkelen mellom $\boldsymbol{L}$ og z-aksen $\beta = \arccos(2/\sqrt{6}) = 35°$

29B) Dette er den røde linjen i Balmerserien, med bølgelengde 656 nm. (Utregning med $\lambda = hc/\Delta E$ gir samme svar.)

30B) $E = V_0$ gir $T = 1/[1 + (k_0L/2)^2]$ som med $k_0L = 4$ blir 0.20

31C) Første forekomst av $T = 1$ når $k_0L\sqrt{E/V_0 - 1} = \pi$, dvs når $E/V_0 = 1 + (\pi/4)^2 = 1.617$

32C) Stående bølger mellom de to barrierene når $b = n\lambda/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Laveste mulige energi som tilfredsstiller dette (for $n = 1$): $E = (h/\lambda)^2/2m_e \simeq 15$ meV

33D) Dette ser ut til å være $|\psi_6(z)|^2$, med 6 nullpunkter. (Alternativt er det sannsynlighetstettheten for ψ_0, ψ_2 eller ψ_4, som alle er symmetriske og med lavere energi, men svaret blir det samme siden alle tilhører bånd nr 1.) Energi -0.52 eV passer da best.

34C) En rask opptelling avslører 14 nullpunkter, dvs $\psi_{14}(z)$, tilstanden i bånd nr 3 med lavest energi. Da passer -0.29 eV best.

35E) $\lambda = hc/E$ med $E = 0.09$ eV gir $\lambda \simeq 14\,\mu$m

36E) $A^2 \cdot (3^2 + 7^2 + 1^2) = 1$ gir $A = 1/\sqrt{59}$

37B) Denne spinntilstanden er egentilstand til $\hat{S}_x$ med egenverdi $-\hbar/2$. I likhet med en hvilken som helst annen spinntilstand er denne egentilstand til $\hat{S}^2$ og kvadratet av en hvilken som helst spinnkomponent. Da gjenstår bare $\hat{S}_y$.

38E) Dette er *samme* spinntilstand som i oppgave 37, omvendt fortegn på hele spinntilstanden påvirker ikke egenverdiene. Dermed $\langle \hat{S}_x \rangle = -\hbar/2$ (dvs skarp).

39E) Dette er en egentilstand til $\hat{S}_y$ (med egenverdi $\hbar/2$). Da er $\hat{S}_x$ uskarp med standardavvik $\hbar/2$.

40E) Gerlach (og Stern, formodentlig) sendte resultatet av sitt eksperiment med sølvatomer til Niels Bohr i form av dette postkortet i februar 1922.