TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag 10. januar 2023

1D) $x = 2\pi \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 58.76 \cdot 10^9/1.38 \cdot 10^{-23} = 2.821 \simeq 2.8$

2E) $x_1 = 1.89636$, $x_2 = 2.54966$, $x_3 = 2.76568$, $x_4 = 2.81120$, $x_5 = 2.81960$, $x_6 = 2.82111$, $x_7 = 2.82138$, $x_8 = 2.82143$ Vi ser at 5 beregninger av høyre side gir x med 3 gjeldende sifre.

3C) $P = j \cdot A = \sigma T^4 \cdot A$. Overflaten til en voksen person ligger typisk mellom 1.6 og 1.8 m^2. Med $A = 1.7$ m^2 blir $P \simeq 800$ W.

4A) Ikke-relativistisk: $K_{\rm kl} = mv^2/2 = mc^2/50$. Relativistisk: $K_{\rm rel} = (\gamma - 1)mc^2$. Her er $\gamma = 5/\sqrt{24}$ slik at $K_{\rm rel} = 0.02062mc^2$. Feilen blir $(0.02062 - 0.02)/0.02 = 0.031 \simeq 3\%$.

5F) $E_4 = K_4 = h^2/2m_e\lambda_4^2$ kombinert med $E_4 = 16\pi^2\hbar^2/2m_eL^2$ gir $\lambda_4 = L/2 = 16$ Å

6C) $\lambda = hc/(E_4 - E_1) = 8m_ecL^2/15h = 2.3\,\mu$m

7E) $P_3 = |c_3|^2$ med $c_3 = (\sqrt{2}/L)\int_0^L \sin(3\pi x/L)\,dx = 2\sqrt{2}/3\pi$. Dermed: $P_3 = 8/9\pi^2 = 0.09$

8B) $P_2 = |c_2|^2$ med $c_2 = (\sqrt{2}/L)\int_0^L \sin(2\pi x/L)\cos(\pi x/L)\,dx = (\sqrt{2}/\pi)\int_0^\pi \sin 2z \cos z\,dz = (\sqrt{2}/\pi) \cdot (4/3) = 4\sqrt{2}/3\pi$. Dermed: $P_1 = 32/9\pi^2 = 0.36$
Her kunne vi se bort fra imaginærdelen av $\Psi(x,0)$ ettersom denne gir en antisymmetrisk integrand på intervallet $0 < x < L$.

9D) $\langle E\rangle = \sum_{n=1}^\infty c_n^2 E_n = \sum_{n=1}^\infty (90/n^4\pi^4) \cdot (n^2\pi^2\hbar^2/2m_eL^2) = \sum_{n=1}^\infty (1/n^2) \cdot (45\hbar^2/\pi^2 m_e L^2) = 15\hbar^2/2m_eL^2$, som med $L = 32$ Å blir 55 meV.

10B) $E_0 = (1/2)\hbar\omega = (1/2)\hbar\sqrt{k/m}$ slik at de klassiske vendepunktene i grunntilstanden ψ_0, bestemt av $E_0 = kx_0^2/2$, blir $x_0 = \pm(\hbar^2/km)^{1/4} = \pm(1.05^2 \cdot 10^{-68}/1860 \cdot 6.86 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27})^{1/4} = \pm 4.8$ pm. Dermed er maksimalt klassisk utsving fra likevekt 4.8 pm.

11B) $\lambda = 2\pi\hbar c/\hbar\sqrt{k/m} = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8/4.0415 \cdot 10^{14} = 4.7\ \mu$m

12F) $\exp(-\hbar\omega/k_BT) = \exp(-1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 4.0415 \cdot 10^{14}/1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300) = 3.5 \cdot 10^{-5}$

13B) Med $\exp(-x/\xi) \simeq 1 - x/\xi$ blir $V_{\rm M}(x) \simeq V_0x^2/\xi^2$, og når dette settes lik $V(x) = kx^2/2$, finner vi at $V_0/\xi^2 = k/2$, og dermed $\xi = \sqrt{2V_0/k} = \sqrt{2 \cdot 11.1 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}/1860} = 43.7$ pm

14B) Massesenteret ligger i avstand $143 \cdot 3/7$ pm fra O-atomet og i avstand $143 \cdot 4/7$ pm fra C-atomet. Treghetsmomentet I_0 mhp en akse gjennom massesenteret er dermed

$$I_0 = 16 \cdot (0.143 \cdot 3/7)^2 + 12 \cdot (0.143 \cdot 4/7)^2 = 0.14,$$

i enheten u nm^2. Dermed:

$$\Delta E = \hbar^2/I_0 = 0.30 \text{ meV}.$$

15D) Pga 11 nullpunkter er dette 11. eksiterte tilstand. Dermed i alt 12 bundne tilstander.

16F) Kinetisk energi i grunntilstanden er litt mindre enn hvis dette hadde vært en uendelig dyp potensialbrønn (partikkel i boks). For elektron i boks: $K_1 = \pi^2\hbar^2/2m_eL^2$, som med $L = 5$ nm er 14.9 meV. Da må 13 meV være rett svar her.

17B) $\kappa = \sqrt{2m_e(V-E)}/\hbar$ som med $V = 0$ og $E = -138$ meV gir $\kappa = 1.9$ pr nm.

18F) $N = n_x + n_y = 8$ med mulige kombinasjoner $(n_x, n_y) = (0, 8), (1, 7), \ldots, (8, 0)$, dvs 9 mulige kombinasjoner.

19E) Vi finner egenfunksjonene $\psi_{n_x}(x)$ og dermed $\psi_{n_y}(y)$ i formelvedlegget. Siden $x = r\cos\phi$ i polarkoordinater, blir $\psi_{10} = R(r)\cos\phi$. Med bevegelse i xy-planet har dreieimpulsen bare en z-komponent, slik at

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_z^2 = -\hbar^2\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},$$

som gir

$$\widehat{L}^2\psi_{10} = \hbar^2\psi_{10},$$

dvs $L^2 = \hbar^2$.

20C) Operatoren $\widehat{L}_z$ inneholder en gangs derivasjon mhp ϕ. Dermed er ψ_{10} ikke egenfunksjon til $\widehat{L}_z$, dvs L_z er uskarp.

21A) Med $x = r\cos\phi$ og $y = r\sin\phi$ blir $\psi_{11} = f(r)\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}f(r)\sin 2\phi$. Da har vi

$$\langle L_z\rangle = \int \psi_{11}^*\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\psi_{11}d^2r \sim \int_0^{2\pi}\sin 2\phi\cos 2\phi d\phi = 0.$$

22D) Egenfunksjoner til $\widehat{L}_z$ er $\exp(im\phi)$, med heltallig m. For å oppnå $L_z = \hbar$, må vi ha $m = 1$. Siden $\psi_{10} \sim \cos\phi$ og $\psi_{01} \sim \sin\phi$, må vi velge $\psi_{10} + i\psi_{01}$, som blir proporsjonal med $\exp(i\phi)$.

23C) To partikler i ψ_{00}, ψ_{10}, ψ_{01}, ψ_{11}, ψ_{20} og ψ_{02}, der hver partikkel har energi hhv $\hbar\omega$, $2\hbar\omega$, $2\hbar\omega$, $3\hbar\omega$, $3\hbar\omega$ og $3\hbar\omega$. I alt: $(2+8+18)\hbar\omega = 28\hbar\omega$.

24A) Når $n_x^2 + n_y^2 = 74$, er de to kvantetallene 5 og 7. Dette kan oppnås på 2 ulike måter, som kombinert med spinndegenerasjon 2 for hver orbital gir total degenerasjonsgrad 4.

25C) Mulighetene for $(n_x\, n_y)$ er $(11), (21), (12), (22), (31), (1, 3)$. Tilørende energier er hhv $2, 5, 5, 8, 10, 10$ i enheten E_0. Pauliprinsippet tilsier inntil 2 elektroner i hver orbital. Dermed inntil 12 elektroner med energi mindre enn $12E_0$.

26B) $E = E_0 \cdot (2\cdot 2 + 4\cdot 5 + 2\cdot 8 + 4\cdot 10) = 80E_0$. Og her er $E_0 = \hbar^2\pi^2/2m_eL^2 = 41.5$ meV slik at $E = 3.3$ eV.

27E) $|\psi_{321}|^2$ har vinkelavhengighet $(\sin\theta\,\cos\theta)^2$, dvs $\sin^2 2\theta$, som er maksimal for $\theta = \pi/4$ og $\theta = 3\pi/4$. Videre avhenger $|\psi_{321}|^2$ av $x = r/a_0$ som $x^4\exp(-2x/3)$, som er maksimal for $x = 6$, dvs $r = 6a_0$.

28C) Med $l = 2$ og $m = 1$ er vinkelen mellom $\boldsymbol{L}$ og z-aksen $\beta = \arccos(1/\sqrt{6}) = 66°$

29D) $\lambda = hc/\Delta E$ med $\Delta E = (1/9 - 1/16) \cdot 13.6$ eV gir $\lambda = 1.9\,\mu$m.

30F) $E < V_0$ gir $T = 0$ og $R = 1$.

31A) $E = 2V_0$ betyr at $q/k = 1/\sqrt{2}$ og $R = (1-1/\sqrt{2})^2/(1+1/\sqrt{2})^2 = 0.03$, slik at $T = 1-R = 0.97$.

32B) En rask opptelling avslører 10 nullpunkter, dvs $\psi_{10}(z)$, tilstanden i bånd nr 1 med høyest energi. Da passer -242 meV best.

33E) $\lambda = hc/E$ med $E = 24$ meV gir $\lambda \simeq 52\,\mu$m

34E) Svaret må inneholde i og det må være proporsjonalt med $\hbar$.

35A) Siden $\widehat{L}_z$ inneholder x og y, men ikke z, kommuterer den med $\widehat{p}_z$.

36D) $A^2 \cdot (5^2 + 7^2) = 1$ gir $A = 1/\sqrt{74}$

37E) Dette er ikke en egentilstand til $\widehat{S}_y$. Dermed er S_y uskarp.

38D) Dette er egentilstand til $\widehat{S}_x$ med egenverdi $-\hbar/2$.

39C) I denne spinntilstanden er $\langle S_z \rangle = 0$ slik at $\Delta S_z = \hbar/2$.

40F) Det var Gerlach og Stern som sendte resultatet av sitt eksperiment med sølvatomer til Niels Bohr i form av dette postkortet i februar 1922.