Universitetet i Trondheim
Institutt for teoretisk fysikk, NTH.



Eksamen i
fag 71515 TEORETISK FYSIKK IB — STATISTISK MEKANIKK
Onsdag 14. desember 1977
kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler: K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung, lommekalkulator, regnestav.

Oppgave I.

1. Formuler og bevis det klassiske ekvipartisjonsprinsippet.

2. Hva gir dette prinsippet for $C_V$ til en ideell gass av

   a) enatomige molekyler,

   b) toatomige molekyler,

   c) lineære treatomige molekyler.

3. Skisser kort den eksperimentelle situasjon relativt ekvipartisjonsprinsippet. Hvorfor er gyldigheten av prinsippet begrenset?

Oppgave II.

Den store kanoniske partisjonsfunksjonen for en enatomig gass kan skrives

$$e^{\beta pV} = \Xi \equiv \sum_{N\geq 0} \frac{e^{\beta\mu N}}{N!h^{3N}} \int dpdq\; e^{-\beta H_N(p,q)}$$

$$= \sum_{N\geq 0} \frac{e^{\beta\mu N}}{N!\Lambda^{3N}} Q_N \tag{1}$$

1. Definer størrelsene som inngår i (1) og regn ut den termiske

de Broglie bølgelengden $\Lambda = \Lambda(T)$ .

2. Vis hvordan tilstandslikningen $p=p(\rho,T)$ kan finnes på parameterform ut fra $\Xi$ , med det kjemiske potensial $\mu$ som parameter.

3. Bruk dette til å beregne $\mu = \mu(p,T)$ for en ideell enatomig gass.

4. Utled av (1) den midlere kvadratiske fluktuasjon i partikkeltallet, $\langle (N-\langle N\rangle)^2\rangle$ , uttrykt ved termodynamiske størrelser. Under hvilke omstendigheter er partikkelfluktuasjonene visuelt observerbare?

Oppgitt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\gamma x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$

Oppgave III.

Betrakt et system av $N$ ikke-vekselvirkende kjernespinn på faste gitterpunkt. Systemet er i likevekt ved temperaturen $T$ og befinner seg i et konstant magnetfelt $\mathcal{H}$ rettet langs z-aksen. Komponenten $s_z^{(i)}$ langs z-aksen av det i'te kjernespinnet kan da anta de $2s+1$ verdiene $-s,-s+1, \ldots, s-1, s$ . Hamiltonfunksjonen for systemet er gitt som

$$H = -\sum_{i=1}^{N} c s_z^{(i)} \mathcal{H}$$

der $c$ er en konstant. Magnetiseringen pr. spinn er gitt som $M_s = c\langle s_z^{(i)}\rangle$ .

1. Beregn først for tilfellet $s=\frac{1}{2}$ partisjonsfunksjonen $Z_{\frac{1}{2}}$ og magnetiseringen pr. spinn $M_{\frac{1}{2}}$ . Uttrykk svarene ved den dimensjonsløse variable $\alpha \equiv c\mathcal{H}/kT$ .

2. Beregn videre entropien pr. spinn $S_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial T}(kT \ln Z_{\frac{1}{2}})$ .

3. Vis dernest at for vilkårlig $s$ er magnetiseringen pr. spinn gitt som

$$M_s = c\left\{(s+\tfrac{1}{2})\coth[(s+\tfrac{1}{2})\alpha] - \tfrac{1}{2}\coth\frac{\alpha}{2}\right\}$$

Beregn den tilsvarende entropi pr. spinn $S_s$. Kontroller svarene mot tidligere regninger ved å sette $s = \frac{1}{2}$.

4. Finn dernest $M_s$ og $\overline{S}_s \equiv S_s - k \ln \frac{2s+1}{4\pi}$ i grensen $s \to \infty$, $c \to 0$ slik at $sc = c_0 =$ konstant.

5. Bestem til slutt oppførselen til $S_{\frac{1}{2}}$ og $\overline{S}_\infty$ $(sc=c_0)$ ved lave temperaturer i de to tilfellene a) $\mathcal{H} = 0$ og b) $\mathcal{H} \neq 0$. Kommenter resultatene.