Eksamen i

fag 92760 STATISTISK FYSIKK

Mandag 4. juni 1973

kl. 9.00 - 16.00

Oppgave 1

Fugasitetsutviklingen av tilstandsligningen er gitt ved Mayers ligninger

$$\frac{p}{kT} = \sum_{l=1}^{\infty} \overline{b}_l z^l ,$$

$$\rho = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \overline{b}_l \cdot z^l ,$$

der ρ er tettheten og z er fugasiteten.

a) Eliminer z (til tredje orden) og finn virialkoeffisientene B_2 og B_3 uttrykt ved $\overline{b}_2$ og $\overline{b}_3$.

b) Gi en diagrammatisk karakterisering av koeffisienten $\overline{b}_l$. Hva er en irredusibel graf (stjerne)? Vis at alle grafer i B_3 som ikke er stjerner kansellerer.

c) Virialutviklingen (tetthetsutviklingen) kan uttrykkes diagrammatisk som

$\frac{p}{kT} = \rho + (1 - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}) \cdot$ (sum av alle ulike umerkete irredusible grafer).

Hva står en graf for i denne implisitte notasjon? Hva er en grafs symmetritall? Hva er symmetritallene for de irredusible grafer som inngår i B_2 og B_3 ?

Oppgave 2.

For et todimensjonalt plasma bestående av N positive og N negative ladninger antar vi vekselvirkningen

$$U(\vec{r}_1, \ldots\ldots \vec{r}_{2N}) = -\sum_{i<j} q_i q_j \ln|\vec{r}_i - \vec{r}_j| ,$$

dvs. feltet rundt en punktladning varierer logaritmisk med avstanden.

Her er $q_i = \pm q$ lik ladningen til partikkel nr. i , og vi antar at gassen er innelukket i en todimensjonal "beholder" med "volum" $V = L^2$. Temperaturen er T .

a) Vis (ved å innføre dimensjonsløse integrasjonsvariable) at den eksplisitte volumavhengighet av konfigurasjonsintegralet Q kan finnes (selv om Q ikke kan beregnes eksakt), og finn tilstandsligningen $p = p(\rho,T)$. Hvilken nedre grense T_0 for T gir tilstandsligningen hvis trykket skal være positivt?

b) Konfigurasjonsintegralet kan divergere for konfigurasjoner der motsatt ladede partikler faller sammen. Finn den laveste temperatur T_1 som gir konvergent konfigurasjonsintegral. Anta at plasmaet ved lave temperaturer faller sammen til N nøytrale par uten gjensidig vekselvirkning. Sammenlign en isochor for en slik gass med tilsvarende isochor for tilstandsligningen under pkt.a), og finn ved hvilken temperatur de to isochorene skjærer hverandre.

c) Med virialutviklingen som utgangspunkt vil vi beregne tilstandsligningen for et nøytralt (tredimensjonalt) plasma, bestående av like mange positive og negative ladninger, $\pm e$. Coulombpotensialet er gitt ved $\varphi_{ij}(r) = q_i q_j/r$, der $q = e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$. Vi lar de positive ladninger danne en kontinuerlig uniform bakgrunn for de negative ladninger, og får virialutviklingen

$$\frac{p-p^{\text{ideell}}}{kT} = \left(1-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\cdot(\text{sum av alle ulike umerkede irredusible grafer unntatt } \bullet\!\!-\!\!\bullet\,) ,$$

hvor bare grafer med vekselvirkning mellom negative ladninger er inkludert.

I γ-utviklingen er summen av ringdiagrammene gitt ved

$$S = -\frac{\gamma^3}{16\pi^3}\int d\vec{k}[\ln(1-\rho\tilde{v})+\rho\tilde{v}] \quad ,$$

hvor $\tilde{v}(k)$ er den Fouriertransformerte

$$\tilde{v}(k) = \int d\vec{r}\; e^{i\vec{k}\vec{r}\gamma} v(\vec{r})$$

av potensialet $v(r) = \gamma^3 F(\gamma r)$. Benytt dette til å argumentere for at når ladningen q benyttes som utviklingsparameter er tilstandsligningen til laveste orden (ut over ideell gass) gitt ved

$$p = kT\rho - \frac{q^3}{3}\sqrt{\frac{\pi}{kT}}\,\rho^{\frac{3}{2}} \quad .$$

Oppgave 3

"Klassiske" teorier for det kritiske punkt til en ferromagnet antar at den fri energi er analytisk i Curiepunktet. Antagelsen kan formuleres som en Taylorutvikling i t og M, dvs.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= a(T)M + b(T)M^3 + \dots\dots, \\ a(T) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots\dots, \\ b(T) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots\dots, \end{aligned} \tag{1}$$

der $\mathcal{H}$ er det ytre magnetfelt, M er magnetiseringen, og $t = T - T_c$.

a) Bestem a_0 og bruk antagelsene (1) ovenfor til å finne de "klassiske" kritiske indekser som nær Curiepunktet beskriver den kritiske isoterm $\mathcal{H}(M, T=T_c)$, den spontane magnetisering $M_o(T<T_c)$, og den isoterme susceptibilitet $\chi_o = \lim\limits_{\mathcal{H}\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T$.

b) Vis ved hjelp av den termodynamiske identitet

$$dF = -SdT + \mu_0 \mathcal{H} dM \quad , \tag{2}$$

der F er Helmholtz' fri energi, S er entropien og μ_0 er den absolutte permeabilitet, at entropien generelt kan skrives som

$$S(T,M) = S_0(T) - \mu_0 \int_0^M dM \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}\right)_M \quad . \tag{3}$$

Anta at $S_0(T)$ er analytisk for $T = T_c$ og bruk dette til å bestemme de kritiske indekser som beskriver den spesifikke varmen (varmekapasiteten) i null felt, dvs. $C_{\mathcal{H}=0}$.

c) Fra termodynamiske argumenter kan det utledes ulikheter mellom de kritiske indeksene. Vis at for $T < T_c$ gjelder ulikheten

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2 \quad , \tag{4}$$

som forbinder de asymptotiske forløp av

$$C_{\mathcal{H}=0} \sim (T_c - T)^{-\alpha'} \; ,$$

$$M_0 \sim (T_c - T)^{\beta} \; , \qquad (5)$$

og $$\chi_0 \sim (T_c - T)^{-\gamma'} \; .$$

Gjelder ulikheten (4) for tallverdiene funnet under pkt. a og b?