Eksamen i
fag 92760 STATISTISK FYSIKK
Torsdag 6. juni 1974
kl. 0900 - 1600

Oppgave 1.

Gi den fysiske betydning av parfordelingsfunksjonen $n_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2;T,V,N)$ for et system av N partikler i volumet V ved temperaturen T. Finn et uttrykk for parfordelingsfunksjonen ut fra den kanoniske fordeling og beregn n_2 for en ideell gass. I den såkalte makroskopiske grense går n_2 mot funksjonen $\overline{n}_2$. Hva består grenseprosessen i i dette tilfellet?

For en gass der molekylene vekselvirker parvis via parpotensialet $\varphi(r)$ er virialutviklingen (tetthetsutviklingen) av $\overline{n}_2(r_{12})$ gitt ved summen av alle irredusible grafer med to rotpunkter. Hva betyr "irredusibel" her? Skriv opp alle grafene i $\overline{n}_2(r_{12})$ til og med fjerde orden i tettheten.

Når parfordelingsfunksjonen er kjent kan tilstandsfunksjonen $p = p(\rho,T)$ beregnes via fluktuasjonsteoremet

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = kT\left[1+\rho^{-1}\int(\overline{n}_2(r)-\rho^2)\,d\vec{r}\right]^{-1}$$

eller via virialteoremet

$$p = kT\rho - \tfrac{1}{6}\int r\,\varphi'(r)\overline{n}_2(r)\,d\vec{r} \quad .$$

Vis at begge relasjoner gir samme uttrykk for trykket til annen orden i tettheten ρ.

Elektromagnetisk stråling med bølgelengde λ spres mot en gass med partikkeltetthet ρ. Finn spredningsintensiteten $I(\vartheta)$ (utenfor den innfallende stråle), uttrykt ved spredningsintensiteten $I_0(\vartheta)$ for den tilsvarende ideelle gass og ved parkorrelasjonsfunksjonen $G(r)$. Hvorfor gjelder relasjonen ikke uten videre ved nøytronspredning? Vis at for langbølget lys fås spesielt sterk spredning nær det kritiske punkt.

Oppgave 2.

Tilstandslikningen for en ferromagnet i nærheten av det kritiske punkt kan representeres ved

$$M = \begin{cases} r\mathcal{H}^a t^{-b} \exp\left[-s\sqrt{\ln^2(\mathcal{H}t^{-u})+v^2}\right] & \text{for } t > 0 \\ q|t|^c + r\mathcal{H}^a|t|^{-b} \exp\left[-s\sqrt{\ln^2(\mathcal{H}|t|^{-u})+w^2}\right] & \text{for } t < 0 . \end{cases}$$

Her er M magnetiseringen, $\mathcal{H}$ det ytre magnetfelt (forutsatt > 0), $t = T-T_c$ er temperaturavviket fra den kritiske temperatur T_c, og a,b,c,q,r,s,u,v og w er reelle positive konstanter. I uttrykket skal den positive kvadratrot velges.

De kritiske indekser $\gamma, \gamma', \delta, \beta, \alpha$ og α' er definert ved følgende asymptotiske uttrykk i nærheten av det kritiske punkt:

Susceptibilitet i null felt: $\chi = \lim\limits_{\mathcal{H}\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = \begin{cases} \text{konst.}\, t^{-\gamma} & (t > 0) \\ \text{konst.}\, |t|^{-\gamma'} & (t < 0) \end{cases}$

Kritisk isoterm: $\mathcal{H}(t\to 0) \sim \text{konst.}\, M^{\delta}$

Spontan magnetisering: $M(\mathcal{H}\to 0) \sim \text{konst.}\, |t|^{\beta}$ $(t < 0)$

Varmekapasitet i null felt: $C_{\mathcal{H}\to 0} \sim \begin{cases} \text{konst.}\; t^{-\alpha} & (t > 0) \\ \text{konst.}\; |t|^{-\alpha'} & (t < 0) \end{cases}$

Samtlige konstanter (betegnet konst.) forutsettes endelige.

a) Vis at følgende relasjoner må være oppfylt:

$$s = 1-a$$
$$u = b/(1-a) \quad ,$$

og beregn de kritiske indekser γ, γ', β og δ, uttrykt ved a og b.

b) Den oppgitte tilstandslikning er en relasjon mellom de termodynamiske størrelser M, $\mathcal{H}$ og t. Vis at for den spesielle verdi

$$c = \frac{2a-1}{1-a}\, b$$

kan tilstandslikningen skrives som en relasjon mellom to størrelser x og y, der x er en kombinasjon av $\mathcal{H}$ og og t, mens y er en kombinasjon av M og t.

c) Gibbs funksjon G er en funksjon av to variable, $\mathcal{H}$ og t. Anta at nær det kritiske punkt kan relasjonen mellom $G, \mathcal{H}$ og t skrives som en relasjon, $z = g(x)$, mellom to størrelser x og z, der x er samme kombinasjon av $\mathcal{H}$ og t som ovenfor, og $z = Gt^{-2ab/(1-a)}$. (c har samme verdi som funnet under punkt b).

Bestem ved hjelp av dette de kritiske indekser α og α' uttrykt ved a og b.

Oppgitt: $$M = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial G}{\partial \mathcal{H}}\right)_T$$

$$C_{\mathcal{H}} = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{\mathcal{H}} .$$