NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk
Hausten 2007

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Onsdag 19. desember 2007
kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgave 1

I denne oppgava skal vi studere ein ideell klassisk gass i to romlege dimensjonar. Gassen er i eit "volum" $V = L^2$ og det er N partiklar med masse m. Hamiltonfunksjonen til systemet er

$$H = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{c^2 p_i^2 + m^2 c^4} \, ,$$

der c er lyshastigheiten, $\mathbf{p}_i$ er impulsen til partikkel nummer i, og $p_i = |\mathbf{p}_i|$. Partisjonsfunksjonen for gassen er Z_N og kan skrivast som

$$Z_N = \frac{Z^N}{N!} \, , \tag{1}$$

der

$$Z = \frac{1}{h^2}\int d^2p d^2x\, e^{-\beta\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}} .$$

1) Gjer greie for faktoren $N!$ i likning (1). Vis at

$$Z = \frac{2\pi V}{(\beta hc)^2}\left(1+\beta mc^2\right)e^{-\beta mc^2} .$$

2) Finn den midlere energien $\langle E\rangle$ for gassen. Ta den ikkje-relativistiske grensa av $\langle E\rangle$ ($\beta mc^2 \gg 1$) og tolk resultatet.

3) Den ultrarelativistiske grensa svarer til $m = 0$. Ein kan rekkeutvikle uttrykket for $\langle E\rangle$ rundt $m = 0$. Dette er ei rekke i $\beta mc^2 \ll 1$. Finn første korreksjon til den ultrarelativistiske grensa.

4) Finn varmekapasiteten $C_V = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}$.

Oppgave 2

I denne oppgava skal vi sjå på ein ein-dimensjonal Ising model med N spinn.

1) Dersom det ikkje er noko ytre magnetfelt er Hamiltonfunksjonen for denne modellen

$$H = -J\sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} .$$

Forklar tydinga av J. Gjer spesielt greie for forteiknet til J.

2) La $\langle s_i\rangle$ vere middelverdien til spinn s_i. Forklar kvifor $\langle s_i\rangle = 0$. Her treng du ikkje rekne - eit enkelt resonnement er tilstrekkeleg.

3) Dersom det er eit ytre magnetfelt B, er det eit tilleggsledd i Hamiltonfunksjonen. Dette leddet kallar vi H_B. Skriv ned eit uttrykk for H_B og gjer greie for dei ulike faktorane.

Oppgave 3

I denne oppgava skal vi studere ein Bosegass i to romlege dimensjonar. Massen til bosonane er m og "volumet" til gassen er $V = L^2$. Uttrykket for tettheiten ρ er

$$\rho = \frac{1}{V}\frac{1}{e^{-\beta\mu}-1} + \frac{1}{\hbar^2}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} ,$$

der $\epsilon = p^2/2m$, μ er det kjemiske potensialet og $\beta = 1/k_BT$. Det første leddet representerer tettheiten av bosonar i grunntilstanden og det andre leddet er tettheiten av bosonar i dei eksiterte tilstandane. Det andre leddet skriv vi som $\rho_{\rm ex}$.

1) Vis at $\rho_{\rm ex}$ kan skrivast som

$$\rho_{\rm ex} = -\frac{1}{\Lambda^2}\ln(1-e^{\beta\mu}) ,$$

der Λ er den termiske bølgelengda.

2) Ved høg temperatur kan vi skrive ρ og P/k_BT som rekker i fugasiteten $z = e^{\beta\mu}$:

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n ,$$
$$\frac{P}{k_BT} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n ,$$

Rekn ut koeffisientane a_1, a_2, b_1 og b_2. Bruk dette til å rekne ut den andre virialkoeffisienten $B_2(T)$ i virialutviklinga for den todimensjonale Bosegassen. Kommentér resultatet.

3) Kva er den kritiske temperaturen T_c for Bose-Einstein kondensasjon i to romlege dimensjonar? Grunngje svaret.

Oppgave 4

I denne oppgava skal vi studere N spinn-1/2 partiklar i tre dimensjonar i eit volum V. Partiklane vekselverkar ikkje, men dei er i eit ytre magnetfelt $\mathbf{B}$ ved $T = 0$. Hamiltonfunksjonen for ein partikkel er

$$H = \frac{p^2}{2m} - \mu \cdot \mathbf{B} ,$$

der μ er det magnetiske momentet, $\mathbf{p}$ er impulsen og m er massen. Dersom magnetfeltet peiker i z-retning er energien gitt ved

$$\epsilon_{\pm}(p) \;=\; \frac{p^2}{2m} \mp \mu B \;,$$

der øvre forteikn er for ein partikkel med spinn opp er og nedre forteikn for ein partikkel med spinn ned. La N_+ vere antal partiklar med spinn opp og N_- vere antal partiklar med spinn ned. Ved $T = 0$ er alle energinivåa opp til Fermienergien ϵ_F fylt opp medan energienivåa med energi høgare energi enn ϵ_F er tomme.

1) La p_F^+ vere Fermiimpulsen for partiklar med spinn opp og p_F^- vere Fermiimpulsen for partiklar med spinn ned. Uttrykk Fermi-impulsen $p_F^{\pm}$ som funksjon av ϵ_F i dei to tilfella.

2) Vis at $N_{\pm}$ kan skrivast som

$$N_{\pm} \;=\; \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F^{\pm}} p^2\, dp \;,$$

der V er volumet til systemet.

3) Finn $N_{\pm}$ og uttrykk svaret som funksjon av ϵ_F.

4) Magnetiseringa er gitt ved

$$M \;=\; \mu\,(N_+ - N_-) \;.$$

For små verdiar av magnetfeltet ($\mu B \ll \epsilon_F$) kan vi skrive

$$M \;=\; \chi B \;,$$

der χ er susceptibiliteten. Finn χ.

Oppgitt formel:

$$\rho \;=\; \frac{1}{\hbar^3}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\theta(\epsilon_F - \epsilon) \;.$$