NTNU

Fakultet for Naturvitskap og Teknologi

Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk
Hausten 2008

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Onsdag 17. desember 2008
kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgåvesettet er på fire sider. Les oppgåvene nøye. Lykke til.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi studere diffusjon i ein romleg dimensjon. La $C(x,t)$ vere konsentrasjonen til eit stoff løyst opp i vatn som funksjon av koordinaten x og tida t. Diffusjonslikninga er

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} = 0\,.$$

a) Kva er D? Vis at diffusjonslikninga kan skrivast som ei kontinuitetslikning og gje ei fysisk tolkning av denne likninga.

b) Løys diffusjonslikninga i det tilfellet der konsentrasjonen ved $t = 0$ er gitt ved

$$C_0(x) = C(x, t = 0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} \ .$$

Her er α ein konstant. Hint: Ein Fouriertransformasjon av $C(x, t)$ kan gjere susen.

Oppgåve 2

I denne oppgåva skal vi studere Ising-modellen i ein romleg dimensjon. Hamiltonfunksjonen for ein Ising-modell i eit ytre magnetfelt B med N spinn og periodiske randkrav er

$$H = -\mu B \sum_{i=1}^{N} s_i - J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} \ ,$$

der $s_{N+1} = s_1$, og μ og J er konstantar.

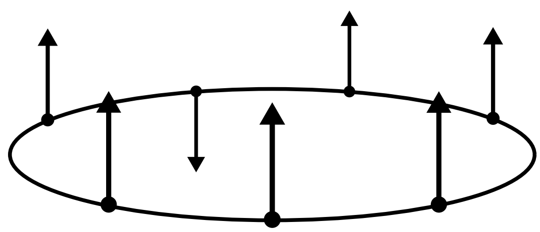

Figure 1: Isingkjede med periodiske randkrav.

a) Gjer greie for dei to ledda i Hamiltonfunksjonen.

b) La $N = 2$. Finn alle moglege spinnkonfigurasjonar og dei tilhøyrande energiane. Rekn ut partisjonsfunksjonen Z_2.

c) Pga symmetrien har vi $\langle s_1 \rangle = \langle s_2 \rangle = \langle s \rangle$, der

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta\mu} \frac{\partial \ln Z_2}{\partial B} \ .$$

Rekn ut $\langle s \rangle$. Ta grensa $B \to \infty$ og tolk resultatet.

d) I resten av oppgåva er $J = 0$. Rekn ut partisjonsfunksjonen Z_N i dette tilfellet. Rekn ut den midlere energien $\langle E \rangle$.

Oppgåve 3

Vi skal studere ein klassisk ideell gass i likevekt ved temperaturen T. Det er N partiklar som har masse m og dei bevegar seg i eit volum V.

a) Vis at den kanoniske partisjonsfunksjonen Z_N er

$$Z_N \quad = \quad \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2m\pi}{h^2\beta}\right)^{\frac{3N}{2}} \quad .$$

b) Finn tilstandslikninga for gassen.

c) Vi skal nå studere den same gassen i det storkanoniske ensemblet. I dette ensemblet varierer partikkeltalet og $P(N)$ er sannsyna for at det er nøyaktig N partiklar i systemet. Vis at N er Poissonfordelt og finn parameteren t.

d) Finn tilstandslikninga for gassen i det storkanoniske ensemblet. og samanlikn resultatet med det du fann i punkt b).

Oppgåve 4

Det er fire spørsmål som du kan svare på uavhengig av kvarandre.

a) Definer transiente og rekurrente tilstandar for ei Markovkjede X_n.

b) Forklar kort omgrepet kvantetrykk for degenererte Fermigassar. Kva krefter i ein kvit dverg sørgjer for at den er i hydrostatisk likevekt?

c) I denne oppgåva skal vi studere termodynamikken til diatomiske molekyl. Vi kan tilnærme eit slikt molekyl med ein stiv rotator med Hamiltonoperator

$$H \quad = \quad \frac{\mathbf{L}^2}{2I} \ ,$$

der $\mathbf{L}$ er dreieimpulsoperatoren og I er tregheitsmomentet til molekylet. Energiane til systemet er gitt ved

$$E_{l,m} \quad = \quad \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} \ ,$$

der $l = 0, 1, 2...$ er dreieimpulsen og $m = -l, -l+1, ...l$ er z-komponenten til dreieimpulsen. For ein gitt verdi av l er degenerasjonsgraden til rotatoren $g(l) = 2l + 1$. Partisjonsfunksjonen er

$$Z \quad = \quad \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{-l(l+1)\Theta_R/T} \ ,$$

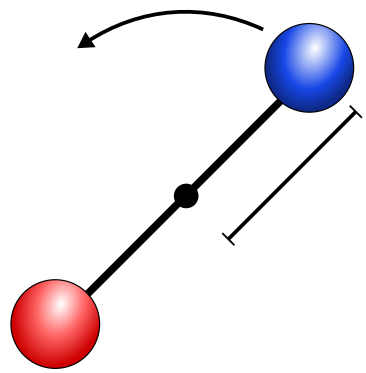

Figure 2: Toatomig molekyl.

der $\Theta_R = \frac{\hbar^2}{2Ik_B}$ er den karakteristiske temperaturen. Rekn ut Z for $T \gg \Theta_R$ og finn den midlere energien $\langle E \rangle$.

d) I denne oppgåva skal vi studere ein ideell Bose gas i d romlege dimensjonar i eit "volum" V. Dispersjonsrelasjonen er

$$\epsilon = p^n ,$$

der n er eit heiltal. Du kan sette $\mu = 0$. Vis at

$$P = \frac{n}{d}\frac{\langle E \rangle}{V} .$$

Nyttige formlar:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle E \rangle}{V} &= \frac{1}{\hbar^d}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \\
\frac{P}{k_B T} &= \pm\frac{1}{\hbar^d}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln\left[1 \pm e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right] \\
\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} &= \frac{2^{1-d}}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)}\int_0^\infty dp\, p^{d-1}
\end{aligned}$$

$$P(n) = \frac{e^{-t}t^n}{n!} .$$

$$\begin{aligned}
f(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx , \\
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(p)\, dp .
\end{aligned}$$