NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Kontinuasjonseksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

15. august 2009
kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Les oppgåvene nøye. Oppgåvesettet er på tre sider.

Oppgåve 1

I det storkanoniske ensemblet er partikkeltalet N ikkje konstant. Finn middelverdien $\langle N \rangle$ og fluktuasjonane $(\Delta N)^2$ uttrykt ved hjelp av det kjemiske potensialet μ, $\beta = 1/k_B T$ og den storkanoniske partisjonsfunksjonen Θ.

Oppgåve 2

I denne oppgåva skal vi sjå på ein ein-dimensjonal Ising model med N spinn. Dersom det ikkje er noko ytre magnetfelt er Hamiltonfunksjonen for denne modellen

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} \ .$$

1) Rekn ut partisjonsfunksjonen Z_N.

2) La $\langle s_i \rangle$ vere middelverdien til spinn s_i. Forklar kvifor $\langle s_i \rangle = 0$. Her treng du ikkje rekne - eit enkelt resonnement er tilstrekkeleg.

3) Dersom det er eit ytre magnetfelt B, er det eit tilleggsledd i Hamilton-funksjonen. Dette leddet kallar vi H_B. Skriv ned eit uttrykk for H_B og gjer greie for dei ulike faktorane.

Oppgåve 3

Definer transiente og rekurrente tilstandar for ei Markovkjede X_n.

Oppgåve 4

Vi har eit system av to identiske partiklar som ikkje vekselverkar. Det er to ein-partikkeltilstandar 1 og 2 med energi $\epsilon_1 = -\epsilon$ og $\epsilon_2 = \epsilon$, der ϵ er ein konstant.

1) Rekn ut partisjonsfunksjonen i dei tilfella der partiklane tilfredsstiller Maxwell-Boltzmann statistikk, Bose-Einstein statistikk, og Fermi-Dirac statistikk.

2) Kva er den midlere energien $\langle E \rangle$ for $T = 0$ i dei tre tilfella?

Oppgåve 5

Kva er trykket P til ein ideell Bose-gass ved $T = 0$? Kva er trykket P til ein ideell klassisk gass ved $T = 0$?

Oppgåve 6

La ρ vere tettheiten av mikrotilstandar i faserommet for eit system med N partiklar i tre romlege dimensjonar. Forklar kvifor ρ tilfredsstiller kontinuitetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \;=\; 0 \;,$$

der $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, og der $\mathbf{v}$ på komponentform er $(\dot{p}_1, \dot{p}_2, ..., \dot{p}_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{3N})$. Bruk dette resultatet og Hamiltons likningar til å vise Liouvilles teorem

$$\frac{d\rho}{dt} \;=\; \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} \;,$$

der H er Hamiltonfunksjonen til systemet og $\{A, B\}$ er Poissonparantesen mellom A og B.

Oppgåve 7

Kva er ein syklisk koordinat? Vis at ein syklisk koordinat impliserer ein bevart storleik.

Oppgåve 8

Skriv ned Hamiltonfunksjonen for ein eindimensjonal harmonisk oscillator med masse m og frekvens ω.

Oppgitte formlar:

$$\begin{aligned}
P(N) &= \frac{e^{\beta\mu N}}{\Theta} Z_N \;, \\
\{A, B\} &= \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial q} \;, \\
\langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \;.
\end{aligned}$$