

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt:  
Øyvind Borck  
Telefon: 73551091

### Eksamen TFY4230: Statistisk fysikk

Lørdag 5. desember 2009  
kl. 09.00–13.00

Oppgavesettet består av tre oppgaver på fire sider.

Tillatte hjelpemidler: C.

Godkjent, enkel kalkulator

K. Rottmann: Matematisk formelsamling

K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

*Se også oppgitte formler nederst på side 4 i oppgavesettet.*

Alle deloppgaver teller likt. Les oppgavene nøye. Lykke til!

#### Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi studere en klassisk gass bestående av  $N$  partikler med masse  $m$ . Partiklene befinner seg i en beholder med volum  $V$ . Systemet er lukket, men i termisk kontakt med omgivelsene. Hamiltonfunksjonen til systemet er:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$$

Vi skal i første del av oppgaven anta at det ikke er vekselvirkning mellom partiklene (ideell gass). Da er potensialet  $\phi = 0$  inne i beholderen. Vi skal anta at potensialet er uendelig stort utenfor volumet  $V$ , slik at partiklene holdes på plass i beholderen. Partisjonsfunksjonen kan da skrives på formen

$$Z_N = \frac{Z^N}{h^{3N} N!}$$

der

$$Z = \int d^3p d^3x \exp\left(-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)$$

a) Vis at

$$Z_N = C \frac{V^N}{N!}$$

og bestem  $C$  uttrykt ved  $m, h, k$  og  $T$ .

b) Beregn trykket til den ideelle gassen, og vis at tilstandslikningen er gitt ved den ideelle gassloven.

I resten av oppgaven skal vi studere en gass med vekselvirkning mellom partiklene (reell gass). Vi skal anta at vekselvirkningen skjer via et parpotensial:

$$\phi(r) = \begin{cases} \infty & r < d \\ -\varepsilon \left(\frac{d}{r}\right)^6 & r > d \end{cases}$$

kjent som Sutherlandpotensialet, se figur 1. For en fortynnet gass kan tilstandslikningen skrives på formen:

$$\frac{p}{kT} = \rho + B_2(T)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3) \quad (1)$$

der  $B_2(T)$  er andre virialkoeffisient. Denne kan beregnes eksakt for Sutherlandpotensialet.

c) Vis at

$$B_2(T) = \frac{2\pi}{3}d^3 \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)n!} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^n \right) \quad (2)$$

d) Definer Boyletemperaturen  $T_B$ . Hvordan er trykket for den reelle gassen sammenlignet med trykket for en ideell gass når (i)  $T < T_B$ , (ii)  $T = T_B$  og (iii)  $T > T_B$ ? Anta at korreksjoner av orden  $\rho^3$  og høyere er neglisjerbare.

## Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi se på en ideell Fermigass i en  $d$ -dimensjonal boks med sidekanter  $L$  og volum  $V = L^d$ . Partikkeltallet  $N$ , indre energi  $U$  og trykk  $P$  er gitt ved

$$N = C_d V \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$$U = C_d V \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{d/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$$p = C_d kT \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{(d-2)/2} \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)})$$

der  $C_d$  er en dimensjonsavhengig størrelse og  $\mu$  er det kjemiske potensialet.

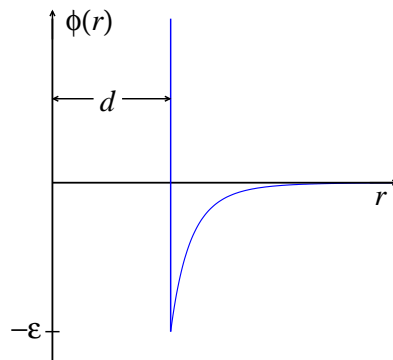


Figure 1: Sutherland-potensialet.

- a) Vis at når  $T = 0$  så er midlere energi per partikkel lik

$$\frac{U}{N} = \frac{d}{d+2} \varepsilon_F$$

der  $\varepsilon_F \equiv \mu(T = 0)$  er Fermienergien.

- b) Vis at for trykket gjelder sammenhengen

$$p = \frac{2U}{dV}$$

for *alle* temperaturer.

- c) Forklar *kort* hvorfor trykket for den ideelle Fermigassen er større enn null når  $T = 0$ .

### Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi studere en enkel, en-dimensjonal modell av et DNA-molekyl. 'DNA-molekylet' består av to strenger bundet sammen med  $N$  basepar, se figur 2. Du kan anta at  $N$  er et stort tall (for eksempel er  $N \sim 10^6$  for menneske-DNA). Hvert basepar kan være i en av to energitilstander: Lukket med energi 0 eller åpent med energi  $\varepsilon$ . Vi skal anta at DNA-molekylet bare kan åpnes fra *venstre* side, og at basepar nummer  $n$  bare kan åpnes dersom alle basepar til venstre ( $1, 2, 3, \dots, n-1$ ) allerede er åpne.

- a) Vis at partisjonsfunksjonen for denne modellen summerer til

$$Z = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \quad \text{der} \quad x = e^{-\beta\varepsilon} \quad (3)$$

b) Vis at midlere antall åpne basepar,  $\langle n \rangle$ , er gitt ved:

$$\langle n \rangle = \frac{(N+1)x^{N+1}}{x^{N+1}-1} - \frac{x}{x-1}$$

og finn verdien i de to grensene (i)  $x \rightarrow 0$  og (ii)  $x \rightarrow 1$ .

(Hint:  $\langle n \rangle$  går ikke mot  $\infty$  når  $x \rightarrow 1$ !)

Vi skal nå anta at hvert åpent basepar kan rotere fritt og orientere seg på  $g$  antall ulike måter, slik si at hver åpen tilstand av et basepar er  $g$ -foldig degenerert. Partisjonsfunksjonen med degenerasjon er lik den i likning (3), men med

$$x = ge^{-\beta\varepsilon}$$

Når  $g > 1$  kan  $x$  bli større enn 1. Temperaturen der  $x = 1$  er en kritisk temperatur  $T_c$ . En kan lett vise at  $T_c$  er endelig og ulik null dersom  $g > 1$ .

c) Anta at  $g > 1$  og finn midlere antall åpne basepar  $\langle n \rangle$  når  $x \gg 1$ .

d) Hvor stor er sannsynligheten for at DNA-molekylet separeres helt ( $N$  åpne basepar) når (i)  $T < T_c$ , (ii)  $T = T_c$ , og (iii)  $T > T_c$ ? Kommenter resultatet.

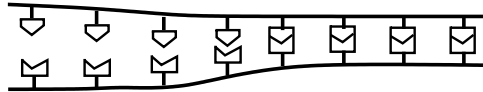


Figure 2: Enkel DNA-modell. I dette eksemplet består molekylet av  $N = 8$  basepar der 4 er åpne. Normalt er  $N$  et mye større tall. Energien for denne tilstanden er  $E_4 = 4\varepsilon$ .

### Oppgitte formler:

$$B_2(T) = \frac{1}{2} \int d^3r [1 - e^{-\beta\phi(|\mathbf{r}|)}]$$

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$$

$$P(E_n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$$